وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جامعة الحاج لخضر – باتنة –

كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير

قسم علوم التسيير

سلسلة محاضرات في مقياس

رياضيات المؤسسة

للسنة الثانية تخصص مالية و محاسبة

من إعداد الأستاذ/ سليم بوهيدل

المحاضرة الأولى

- **مفهوم رياضيات المؤسسة:**

تعرف رياضيات المؤسسة على أنها العلم التطبيقي لاتخاذ القرارات، حيث أنها تستخدم كل الطرق العلمية المتاحة لمواجهة مشاكل الإدارة وذلك بغية التوصل إلى مستوى عال من الترشيد في اتخاذ القرارات.

تعرف أيضا على أنها عملية استخدام الأساليب العلمية في حل المشكلات المعقدة التي تنطوي على توظيف أعداد كبيرة من القوة العاملة، المعدات والمواد الأولية في المصانع، المؤسسات الحكومية، وفي القوات المسلحة.

تعرف أيضا على أنها التطبيق العلمي للطرق الرياضية والإحصائية في حل مختلف المشاكل الإدارية والاقتصادية، التي تواجه المقرر في أداء مهامه، والقابلة للتكميم بالدرجة الأولى.

من خلال التعاريف السابقة يمكن استنباط التعريف التالي:

" رياضيات المؤسسة هي التحضير العلمي لاتخاذ القرارات "

- ✓ **التحضير؟** يقصد بذلك دراسة كاملة وشاملة لمختلف العناصر المكونة والفاعلة في الظاهرة قيد الدراسة.
- ✓ **العلمي؟** يقصد بذلك الاستعانة بالمنطق العلمي أثناء دراسة الظاهرة قيد البحث وذلك من خلال استخدام وبشكل خاص مجموعة من الطرق والأساليب الرياضية والإحصائية.
- ✓ **اتخاذ؟** يقصد بذلك أن المسير له السلطة المطلقة لاتخاذ القرار.
- ✓ **القرارات؟** يقصد بذلك أن للموضوع قيد الدراسة عدة حلول ممكنة.
- ✓

- تتسم رياضيات المؤسسة بتعدد وتنوع أساليبها، إلا أن لكل أسلوب مجال معين للاستخدام، وفيما يلي أهم الأساليب الشائعة الاستخدام والتي سيتم التطرق إلى بعضها في حينها بنوع من التفصيل حسب أهميتها ومجال استخدامها في مجال الاقتصاد والتسيير.

1. البرمجة الخطية، **2.** نموذج النقل، **3.** نموذج التعيين، **4.** نماذج شبكات الأعمال، **5.** تحليل سلاسل ماركوف، **6.** نظرية المباريات، **7.** البرمجة الديناميكية، **8.** نماذج المحاكاة.

الفصل الأول

البرمجة الخطية:

I. تعريف: هي أسلوب رياضي تكون فيه العلاقات خطية، لذا تدعى: "البرمجة الخطية" ، وهو يبحث عن هدف معين (تعظيم أو تخفيض) في ظل ظروف وشروط وقيود معينة.

البرمجة الخطية هي نموذج كمي، يسعى إلى تعظيم وتدنية دالة معينة في ظل مجموعة من القيود.

البرمجة الخطية هي ذلك الأسلوب الذي يهتم بالاستخدام الأمثل للموارد المحدودة لتلاؤم الأهداف المطلوبة.

II. **عناصر البرمجة الخطية:** يتكون نموذج البرمجة الخطية من ثلاثة عناصر هي:

أ. **دالة الهدف:** يجب العمل دوما على تحديد الهدف المنشود من وراء حل المشكلة، هذا الهدف قد يكون تعظيم (أرباح، فوائد، إنتاجية) أو تخفيض (تكاليف، مسافة، تعويضات).

ب. **القيود:** هي مجموعة المحددات التي لا تستطيع متخذ القرار التحكم فيها ولكنه يحاول الوصول إلى أفضل قرار في ظلها. حيث يتم تجسيدها في شكل متباينات ومعادلات رياضية.

ت. **شرط عدم السلبية:** يشترط البرنامج الخطي أن تكون المتغيرات غير سالبة.

-الصياغة العامة لنموذج البرمجة الخطية:

دالة الهدف: $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots c_nx_n$

حيث: c_n : معامل الوحدة (تكلفة ربح)

: x_n: عدد الوحدات

القيود:

حيث: a_i: عدد الوحدات المستخدمة لإنتاج وحدة واحدة

b_i. كمية الوحدات المتاحة من a_i

شرط عدم السلبية:

ومنه تكون الصياغة العامة للنموذج على الشكل التالي:

حالة التعظيم:	**حالة التخفيض:**
$\begin{cases} \\ \\ xj \geq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \\ \\ xj \geq 0 \end{cases}$

مثال: تقوم مؤسسة x بإنتاج نوعين من التجهيزات A ,B وذلك باستخدام نوعين من المادة الأولية وذلك حسب الاحتياجات التالية:

A: 4 وحدات من م$_1$ ، 2 وحدات من م$_2$.

B : 5 وحدات من م$_1$ و 4 وحدات من م$_2$.

المطلوب: تحديد النموذج الرياضي لهذه المسألة إذا علمت أن ربح الوحدة الواحدة من A هو 9 دج ومن B هو 12 دج، في حين أن الكمية المتاحة من المادة الأولى م$_1$ هي 200 وحدة ومن المادة الثانية م$_2$ هي 120 وحدة.

القيود	B	A	
200	5	4	م$_1$
120	4	2	م$_2$
	12	9	ربح

تحديد النموذج الرياضي:

دالة الهدف:

$$MaxZ = A_{ربح} + B_{ربح} \Longrightarrow MaxZ = 9x_1 + 12x_2$$

x_1: عدد الوحدات المنتجة من A.

x_2: عدد الوحدات المنتجة من B.

القيود:

عدم السلبية: $x_1, x_2 \geq 0$

ومنه النموذج:

$$\begin{cases} MaxZ = 9x_1 + 12x_2 \\ \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

طرق حل مشكلة البرمجة الخطية:

يمكننا حل المسائل المصاغة في صورة نموذج برمجة خطية بالطرق التالية:

- طريقة الحل البياني.
- الطريقة المبسطة " السمبلاكس".
-

1. **طريقة الحل البياني:**

يتم استعمال هذه الطريقة باستعمال الرسم البياني:

- نضع في المحور الأول عدد الوحدات الواجب إنتاجها من المنتوج الأول.
- نضع في المحور الثاني عدد الوحدات الواجب إنتاجها من المنتوج الثاني.
- نقوم برسم جميع القيود في هذا الرسم البياني.
- نحدد منطقة الحلول الممكنة.
- نختبر مردودية أركان الحل ونختار الحل الأمثل.

مثال: المثال السابق:

$4x_1 + 5x_2 = 200 \;/\; x_1 = 0 \longrightarrow x_2 = 40$

$x_2 = 0 \longrightarrow x_1 = 50$

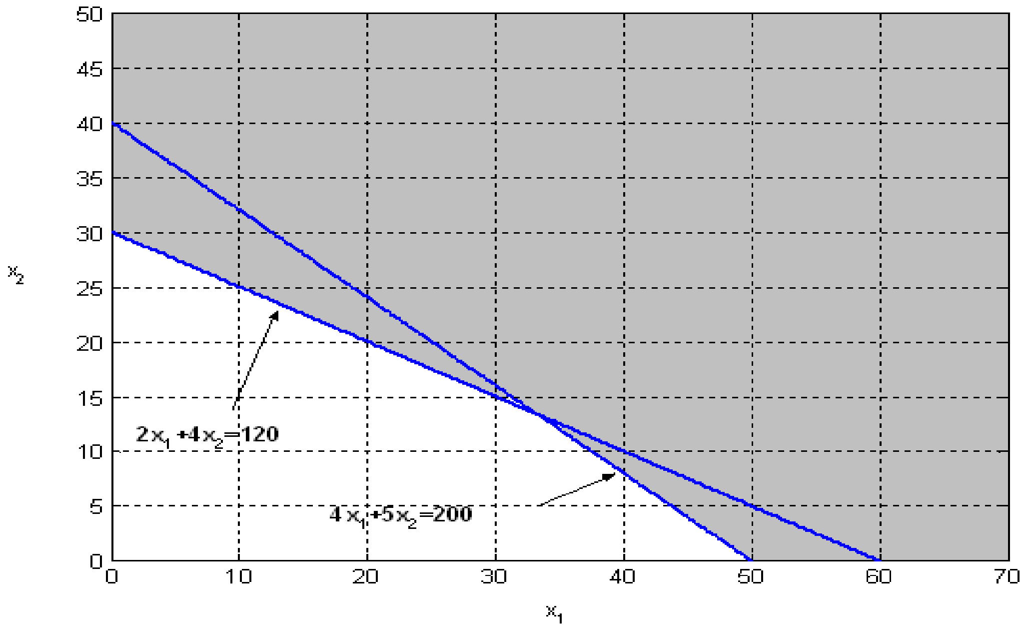
$2x_1 + 4x_2 = 120 \;/\; x_1 = 0 \longrightarrow x_2 = 30$

$x_2 = 0 \longrightarrow x_1 = 60$

$\boxed{Z = 460}$

أركان الحل:

A، B ،C،D يتم التعويض في دالة الهدف:

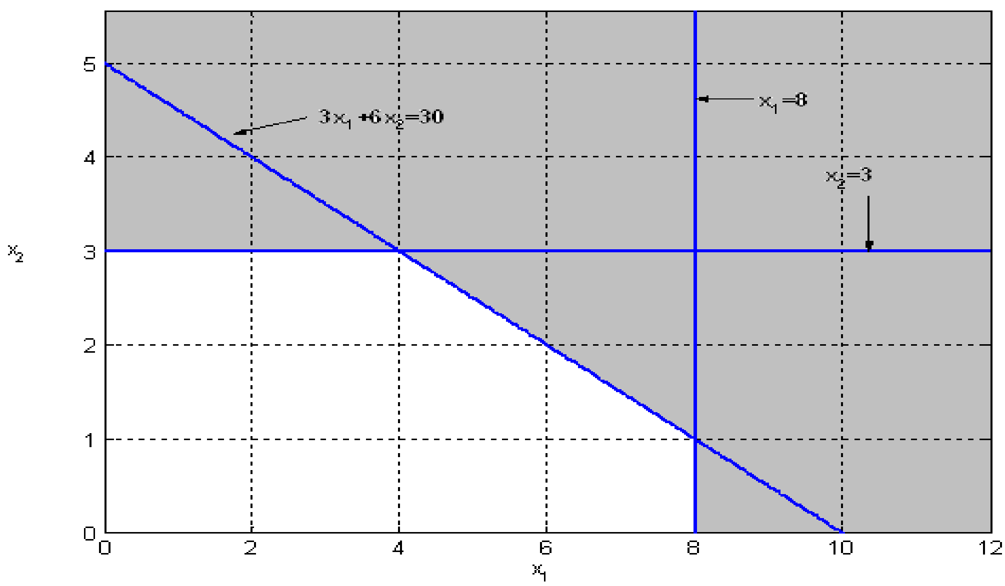


حالات خاصة :

- **حالة الحل البديل:**

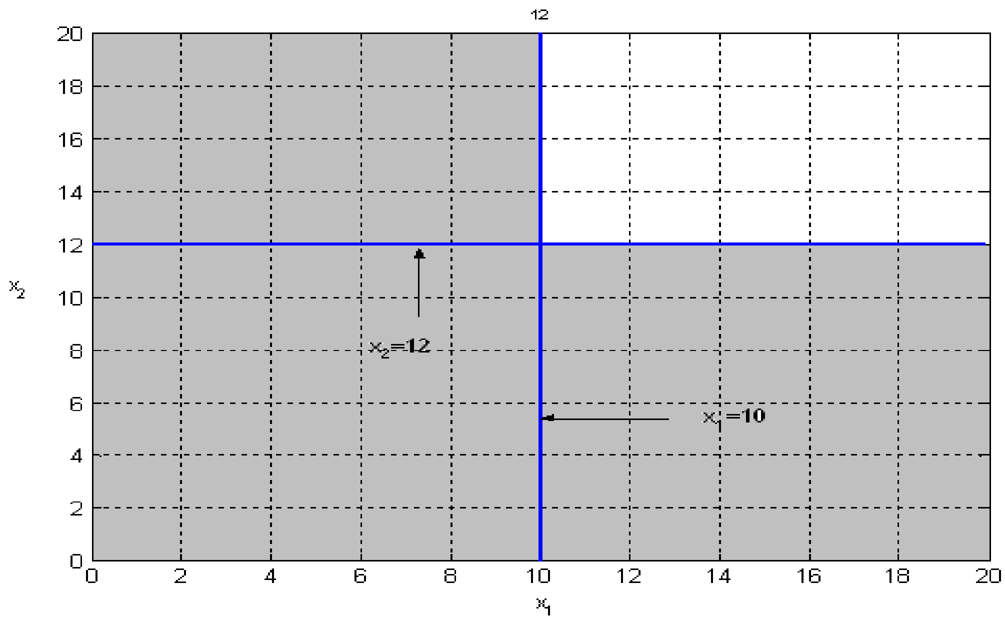
-

$$\begin{cases} MaxZ = 2x_1 + 4x_2 \\ x_1 \leq 8 \\ x_2 \leq 3 \\ 3x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



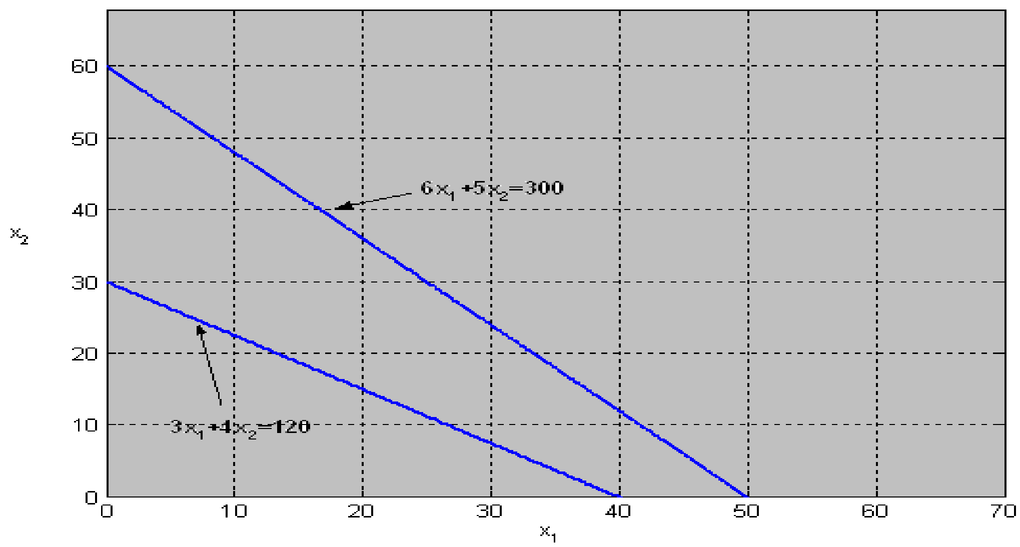
- **حالة الحلول اللامتناهية:**

$$\begin{cases} MaxZ = 6x_1 + 4x_2 \\ x_1 \geq 10 \\ x_2 \geq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



- **حالة عدم وجود حلول تماما:**

$$\begin{cases} MaxZ = 8x_1 + 15x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 120 \\ 6x_1 + 5x_2 \geq 300 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



المحاضرة الثانية

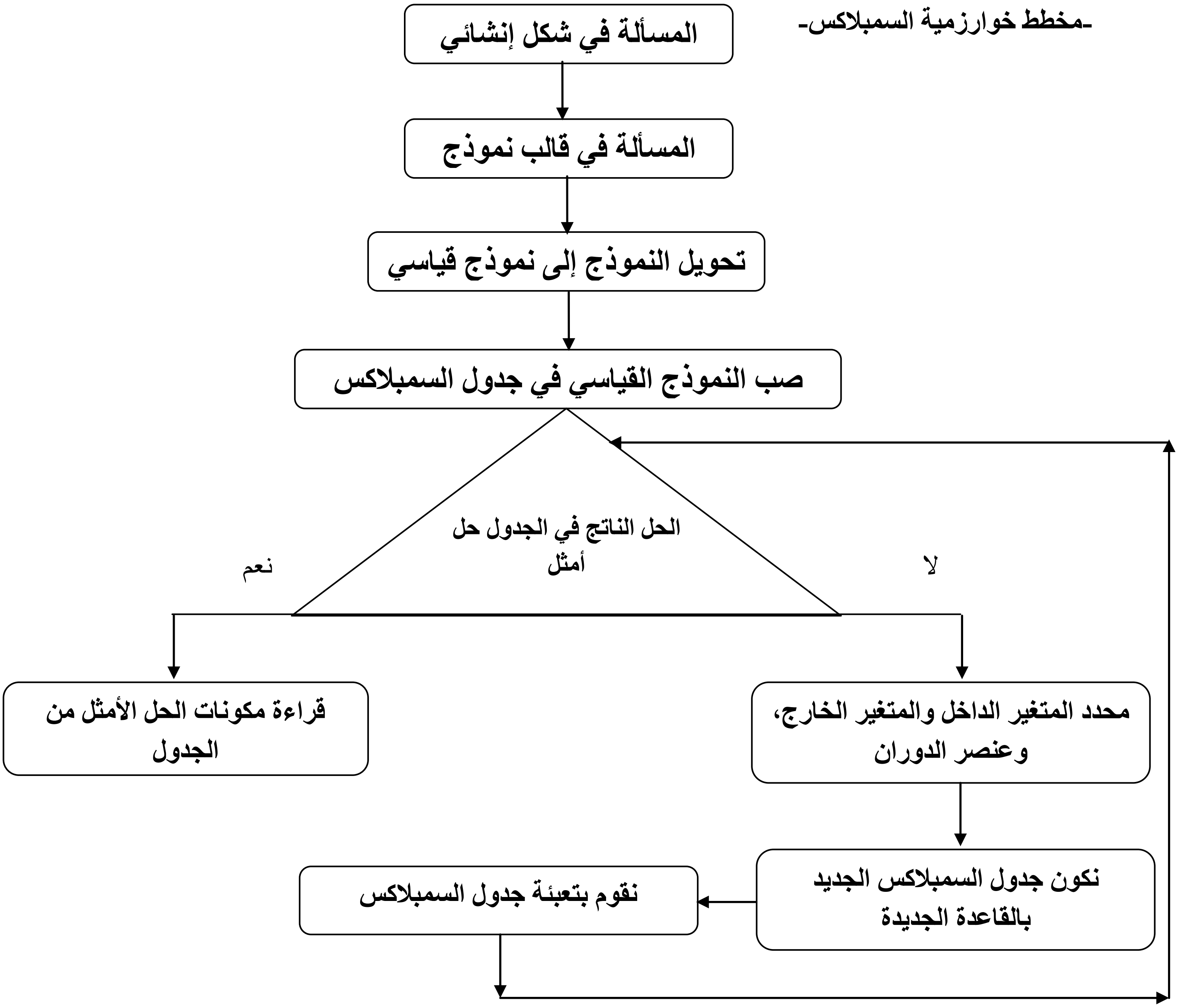
بينا في السابق كيف تستخدم الطريقة البيانية في حل مشكلة البرمجة الخطية، ولكن هناك قصورا واضحا في هذه الطريقة نظرا لكونها لا تستخدم إلا في حالة وجود متغيرين (سلعتين) فقط، أو ثلاثة على أكثر تقدير وبصعوبة. ويرجع ذلك أساسا إلى استحالة الرسم البياني عندما يزيد عدد المتغيرات الواجب اتخاذ قرار بشأنها عن ثلاثة كما أشرنا إلى الطريقة الجبرية ووقفنا عند الصعوبة التي تعتري هذه الطريقة، والتي تزداد تعقيدا كلما زاد عدد المتغيرات عن عدد القيود. وطالما أن معظم التطبيقات العلمية تتضمن عددا كبيرا من المتغيرات والقيود، فإننا نحتاج إلى أسلوب آخر صمم خصيصا لذلك يعرف بأسلوب "السمبلاكس". حيث وضعه العالم الأمريكي G. Dantzig عام 1947، وطبق لأول مرة سنة 1951.

طريقة السمبلاكس:

هي الطريقة الأكثر استعمالا لأنها مبينة على أساس علمي، وتستخدم الخطوات التالية:

1. إيجاد الحل الأولي.
2. اختيار الأمثلية، إذا كان الحل أمثل فهو يعتبر مقبولا، والعكس بالعكس.
3. تحسين الحل في حالة عدم التأكد من أمثلية الحل، والشكل الموالي يوضح خطوات العملية.

-مخطط خوارزمية السمبلاكس-



- وكل خطوة من هذه الخطوات تتشكل من عمليات حسابية تتم في جداول، والتي تأخذ الشكل التالي:

معاملات دالة الهدف C_i	bj	V	CK
قيم المتغيرات (x_i)	كمية الموارد	القيم الأساسية المجهولة	القيم المقابلة للقيود المجهولة
مصفوفة القيود aj			
سطر التقييم Δc	قيمة دالة الهدف Z		

مثال توضيحي: ليكن لدينا النموذج الرياضي التالي:

$$\begin{cases} MaxZ= 8x_1+6x_2 \\ 4x_1+2x_2 \leq 60 \\ 2x_1+4x_2 \leq 48 \\ x_1,x_2 \geq 0 \end{cases}$$

المرحلة الأولى:

تحويل المتراجحات إلى معادلات

$$4x_1+2x_2+e_1 = 60$$

$$2x_1+4x_2+e_2 = 48$$

e_i : تسمى متغيرات عشوائية أو متغيرات الفوارق، وهذه المتغيرات تعطي عوائد معدومة أي أن قيمتها في دالة الهدف معدومة.

ومنه تصبح دالة الهدف على الشكل التالي:

$$MaxZ= 8x_1+6x_2+0e_1+ 0e_2$$

$$Z= CK.\ Bj$$

$$\Delta C = \sum (CK.aj - Ci)$$

ملاحظة:

كلما كانت ΔC (سطر التقييم) موجبة أو معدومة فإن الحل يعتبر أمثلا في حالة التعظيم (Max) والعكس صحيح في حالة التخفيض (Min). (شرط الأمثلية).

المرحلة الثانية:

إذا لم يتحقق شرط الأمثلية، يتم اللجوء إلى تحسين الحل، وذلك من خلال إدخال متغيرة تسمى بالمتغيرة الداخلة، وإخراج متغيرة تسمة بالمتغيرة الخارجة.

1. بالنسبة للمتغيرة الداخلة تمثل أصغر قيمة سالبة في سطر التقييم (في حالة Max) والعكس (Min).

2. بالنسبة للمتغيرة الخارجة تمثل أصغر قيمة للنسبة التالية: $\boxed{M=\frac{bj}{aj}}$ أي حاصل قسمة كمية الموارد bj على معاملات المصفوفة aj. (نستعبد القيم السالبة والقيم المعدومة، وحالات عدم التعيين).
3. نقطة المحور (نقطة الدوران) هي نقطة تقاطع عمود المتغيرة الداخلة مع سطر المتغيرة الخارجة.
4. قيم سطر المحور تساوي القيم القديمة مقسومة على نقطة المحور.
5. قيم عمود المحور كلها تساوي الصفر ماعدا نقطة المحور تساوي واحد.
6. يتم إيجاد عناصر المصفوفة الباقية وفقا للعلاقة الرياضية التالية:

$$\boxed{\text{القيمة الجديدة للعنصر}=\text{القيمة القديمة للعنصر}-\frac{\text{الرقم المقابل في سطر المحور}\ \boldsymbol{x}\ \text{الرقم المقابل في عمود المحور}}{\text{نقطة المحور}}}$$

ملاحظة:

المغزى الاقتصادي لسطر التقييم هو أن إنتاج كل وحدة إضافية يؤثر على دالة الهدف بالمقدار الموجود في سطر التقييم، لذلك تسمى هذه القيم بالتأثيرات الحدية (تكوين).

مثال:

تنتج مؤسسة منتوجين x_1,x_2. بواسطة آلتين M_1,M_2، يتطلب إنتاج وحدة من x_1 تشغيل M_1 لمدة 10 دقائق، وM_2 لمدة 5 دقائق. أما إنتاج وحدة من x_2 فيتطلب تشغيل M_1 لمدة 15 دقيقة، و M_2 لمدة 15 دقيقة أيضا.

تشغل المؤسسة الآلة M_1 لمدة 200 ساعة، والآلة M_2 لمدة 150 ساعة في الشهر لأغراض الوقاية. يقدر الربح الوحدوي للمنتوج x_1 بـ 10 دج، والمنتوج x_2 بـ 15 دج. علما أن المؤسسة لها عطلة شهرين في السنة.

المطلوب:

حدد الإنتاج السنوي من المنتوجين x_1,x_2 حيث يكون الربح أمثلا (السمبلاكس).

حل التمرين:

$$\begin{cases} MaxZ = 10\,x_1 + 15x_2 \\ 10x_1 + 15x_2 \\ 5x_1 + 15x_2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

النموذج القياسي

$$MaxZ = 10\,x_1 + 15x_2 + 0e_1 + 0e_2$$

$$10x_1 + 15x_2$$

$$5x_1 + 15x_2$$

$$x_1, x_2, e_1, e_2$$

			10	15	0	0	
			x_1	x_2	e_1	e_2	
0		120.000	10	15	1	0	8000
0		90.000	5	15	0	1	6000
Z = 0			-10	-15	0	0	
0		30.000	5	0	1	-1	6000
15		6000	$1/3$	1	0	$1/15$	18000
Z = 90.000			-5	0	0	1	
10		6000	1	0	$1/5$	$-1/15$	
15		4000	0	1	$-1/15$	$2/15$	
Z = 120.000			0	0	1	0	

نلاحظ من خلال الجدول الأخير أن جميع القيم موجبة أو معدومة أي أن الحل أمثل، حيث أنه يتوجب إنتاج 6000 وحدة سنويا من المنتوج x_1 و4000 وحدة سنويا من المنتوج x_2 لتحقيق أقصى ربح يقدر بـ: 120.000 دج.

ملاحظة هامة: نلاحظ أن معامل e_2 في سطر التقييم معدوم رغم عدم وجود هذا المتغير في قائمة الحلول، وهذا يدل على وجود حل بديل، ويتم إيجاد هذا الحل باعتبار المتغير محل الملاحظة كمتغير داخل والمحافظة على باقي خطوات التحسين بدون تغيير.

الحل البديل:

			10	15	0	0
			x_1	x_2	e_1	e_2
10		12000	1	$3/2$	$1/10$	0
0		30.000	0	$15/2$	$-1/2$	1
Z = 120.000			0	0	1	0

المحاضرة الثالثة

طريقة السمبلاكس في حالة التخفيض:

عالجنا في السابق كيفية حل المسائل من نوع Max بطريقة السمبلاكس. وسنحاول فيما يلي تبيان طريقة حل المسائل من نوع Min بنفس الطريقة، حيث يستخدم هذا النوع عادة لمعالجة مشاكل تخفيض التكاليف المتعلقة بالإنتاج. حيث يتم ذلك بنفس الطريقة السابقة مع اختلافات في تحويل النموذج إلى نموذج قياسي، واختلافات في اختبار أمثلية الحل.

نفترض النموذج الرياضي التالي:

$$\begin{cases} MinZ = x_1 + 3x_2 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_2 = 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. تحويل المتراجحات إلى معادلات:

المتغير الاصطناعي A_1 عبارة عن ثروة أو مادة ذات تكلفة كبيرة جدا تقدر بـ: M لكنها لا تظهر في الحل النهائي، باعتبارها وسيلة مساعدة لإيجاد الحل فقط.

$$x_2 + A_2 = 3$$

e_1 ، e_2 هي طاقات غير مستغلة.

A_2 عبارة عن متغيرة اصطناعية أيضا.

ومنه تصبح دالة الهدف على الشكل التالي:

$$\begin{cases} MinZ = x_1 + 3x_2 + 0e_1 + 0e_2 + MA_1 + MA_2 \\ x_1 + x_2 + e_1 + A_1 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + e_2 = 6 \\ x_2 + A_2 = 3 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, A_1, A_2 \geq 0 \end{cases}$$

ملاحظة:

إن المتغيرة الاصطناعية A تعمل عكس دالة الهدف، أي في حالة Max تعطى لها أصغر قيمة M- ، وفي حالة Min تعطى لها أكبر قيمة M+.

حل النموذج:

			1	3	0	0	M	M	
			x_1	x_2	e_1	e_2	A_1	A_2	
M		4	1	1	-1	0	1	0	4
0		6	2	1	0	1	0	0	6
M		3	0	1	0	0	0	1	3
Z= 7M			M-1	2M-3	-M	0	0	0	
M		1	1	0	-1	0	1	-1	1
0		3	2	0	0	1	0	-1	$3/2$
3		3	0	1	0	0	0	1	00
Z= M+9			M-1	0	-M	0	0	-2M+3	
1		1	1	0	-1	0	1	-1	
0		1	0	0	2	1	-2	1	
3		3	0	1	0	0	0	1	
Z= 10			0	0	-1	0	-M+1	-M+2	

نلاحظ أن قيم سطر التقييم سالبة أو معدومة أي أن الحل أمثل، وبالتالي من الجدول الأخير نقول أنه يجب على المؤسسة أن تنتج وحدة واحدة من x_1، و 3 وحدات من x_2. بحيث تبقى وحدة من الطاقة غير مستغلة في القيد الثاني، مما يسمح بالحصول على أدنى تكلفة تقدر بـ: 10 و.ن. أما بالنسبة لقيم سطر التقييم التي تسمى بالتأثيرات الحدية أو أسعار الظل، أو مقدار التضحية، فهي تمثل بالنسبة لمثالنا أنه لو يتم تخفيض مقدار الطاقة المستغلة في القيد الأول بوحدة واحدة فإن هذا سيؤدي إلى تخفيض التكلفة بوحدة واحدة أي تصبح 09 وحدات نقدية.

المغزى الاقتصادي لسطر التقييم:

لا يقتصر استغلال المعطيات الواردة في سطر التقييم على إبراز أمثلية الحل من عدمها بل يمتد إلى إيفادنا ببعض المعلومات المفيدة في التنبؤ بأثر التغيرات التي قد تحدث في المعطيات الرئيسية للمسألة على النتيجة النهائية.

<u>مثال توضيحي:</u>

ينتج مصنعا للتأثيث ثلاث أنواع من الخزائن.x_1 ،x_2 ،x_3. حيث يبلغ عائد كل خزانة 18000، 10500، 8000 دج على التوالي.

يتطلب إنتاج هذه الخزائن استخدام ثلاث أنواع من المواد الأولية هي :الخشب، الحديد والزجاج، إذا علمت أنه لا يمكن توفير أزيد من 6000 كلغ من الخشب، و100كلغ من الحديد، و80 كلغ من الزجاج يوميا.

أوجد خطة الإنتاج اليومي قصد تحقيق أكبر عائد ممكن، علما أن إنتاج خزانة واحدة من x_1 يتطلب 06 كلغ من الخشب و 01 كلغ من الحديد و 01 كلغ من الزجاج. في حين أن إنتاج خزانة واحدة من x_2 يتطلب 08 كلغ من الخشب و 01 كلغ من الحديد و 01 كلغ من الزجاج.

كما أن إنتاج خزانة واحدة من x_3 يتطلب 10 كلغ من الخشب و 02 كلغ من الحديد و 01 كلغ من الزجاج.

$$\begin{cases} MaxZ = 80x_1 + 105x_2 + 180x_3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 10x_3 \leq 600 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 100 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq \end{cases}$$

النموذج القياسي للمسألة

$$\begin{cases} MaxZ = 80x_1 + 105x_2 + 180x_3 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 \\ 6x_1 + 8x_2 + \\ x_1 + x_2 + 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1, x_2, x_3, e_1, \end{cases}$$

			x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	
			80	105	180	0	0	0	
0		600	6	8	10	1	0	0	60
0		100	1	1	2	0	1	0	50
0		80	1	1	1	0	0	1	80
Z= 0			-80	-105	-180	0	0	0	
0		100	1	3	0	1	-5	0	33.33
180		50	$1/2$	$1/2$	1	0	$1/2$	0	100
0		30	$1/2$	$1/2$	0	0	$-1/2$	1	60
Z= 9000			10	-15	0	0	90	0	
105			$1/3$	1	0	$1/3$	$-5/3$	0	
180			$1/3$	0	1	$-1/6$	$4/3$	0	
0			$1/3$	0	0	$-1/6$	$1/3$	1	
Z= 9500			15	0	0	5	65	0	

من الجدول الأخير يتضح أنه يتوجب إنتاج $100/3$ من x_2 و $100/3$ من x_3 من أجل بلوغ $28500/3$ كأقصى ربح ممكن.

ومن خلال سطر التقييم يتضح أنه من أجل دخول x_1 إلى الحل (برنامج الإنتاج) يتوجب زيادة عائدها بمقدار 15 دج.

بالنسبة للموارد فإن زيادة وحدة واحدة من المورد الأول "e_1" يؤدي إلى تغيرات في بقية القيم على النحو التالي:

المحاضرة الرابعة

الثنائية:

1. البرنامج الثنائي"الثنائية":

إن لفظ الثنائية في مجال البرمجة الخطية، يعني أن كل مشكلة يمكن صبها في قالب برنامج خطي يمكن صياغتها رياضيا بطريقتين. يطلق على الصياغة الأولى، التي تتم في الحالة العادية وتماشيا مع متطلبات المسألة، الصيغة الأصلية أو النموذج الأولي" *Model primale*"، ويقترن بهذا النموذج، نموذج آخر يطلق عليه إسم النموذج الثنائي (المرافق، الوجه الآخر) "*Modele dual*".

إذن لكل برنامج أصلي أولي، برنامج ثنائي يتم اللجوء إليه في حالة صعوبة إيجاد الحل للبرنامج الأولي،"أو أن للبرنامج الأولي عدة حلول".

ويتم تحويل البرنامج الأولي إلى برنامج ثنائي وفق الطريقة التالية:

$$\begin{cases} MaxZ = \sum_{i=1}^{n} cjxj \\ \sum_{\text{i}=1}^{n} aijx \leq bi \\ x_j \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \text{برنامج أصلي أولي}$$

$$\begin{cases} MinC = \sum bi \\ \sum_{i=1}^{n} aijy \geq ej \\ \end{cases} \longrightarrow \text{برنامج ثنائي}$$

$$y_j \geq 0$$

مثال(1):

نفترض لدينا النموذج الرياضي التالي:

$$\begin{cases} MaxZ = 2x_1 + 3x_2 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 100 \\ 6x_1 + 7x_2 \leq 40 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{برنامج ثنائي}} \begin{cases} MinC = 100y_1 + 40y_2 \\ 4y_1 + 6y_2 \geq 2 \\ 5y_1 + 7y_2 \geq 3 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

مثال(2):

$$\begin{cases} MaxZ = 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 12 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 16 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} MinC = 12y_1 + 16y_2 \\ y_1 + 2y_2 \geq 2 \\ 5y_1 + y_2 \geq 1 \\ 3y_1 + 3y_2 \geq 4 \\ 2y_1 + 5y_2 \geq 2 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

2. **الجدول الأخير للسمبلاكس للبرنامج الثنائي:**

1 - إن التأثيرات الحدية الموجودة في الجدول الأخير للحل للمسألة الأولية والأصلية هي متغيرات الحل في البرنامج الثنائي والعكس صحيح.

2 - إن قيمة دالة الهدف هي نفسها، أي باقي قيم المصفوفة تعكس الإشارة.

مثال(1): ليكن لدينا النموذج الرياضي التالي:

$$\begin{cases} MaxZ = x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 40 \\ x_1 + 4x_2 \leq 90 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} MaxZ = x_1 + 3x_2 + 0e_1 + 0e_2 \\ 2x_1 + x_2 + e_1 = 40 \\ x_1 + 4x_2 + e_2 = 90 \\ x_1, x_2, e_1, e_2 \geq 0 \end{cases}$$

			x_1	x_2	e_1	e_2
1 3		10 20	1 0	0 1	$4/7$ $-1/7$	$-1/7$ $2/7$
Z= 70			0	0	$1/7$	$5/7$

البرنامج الثنائي:

$x \longleftarrow$ طاقات عاطلة

طاقات عاطلة $\longleftarrow y$

$$\begin{cases} MinC = 40y_1 + 90y_2 \\ 2y_1 + y_2 \geq \\ y_1 + 4y_2 \geq \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

الجدول الأخير للبرنامج الثنائي:

			y_1	y_2	e_1	e_2
40 90			1 0	0 1	$-4/7$ $1/7$	$1/7$ $-2/7$
Z= 70			0	0	-10	-20

مثال(2): المثال الموجود في المغزى الاقتصادي لسطر التقييم:

$$\begin{cases} MinC = 600y_1 + 100y_2 + 80y_3 \\ 6y_1 + y_2 + \\ 8y_1 + y_2 + \\ 10y_1 + 2y_2 \\ y_1, y_2, y_3 \geq \end{cases}$$

الجدول الأخير للبرنامج الثنائي:

			y_1	y_2	y_3	e_1	e_2	e_3
600		5	1	0	$1/6$	0	$-1/3$	$1/6$
100		65	0	1	$-1/3$	0	$5/3$	$-4/3$
0		15	0	0	$-1/3$	1	$-1/3$	$-1/3$
Z= 9500			0	0	$-40/3$	0	$-100/3$	$-100/3$

المحاضرة الخامسة

2.تحليل الحساسية:

تحليل الحساسية هو كيفية تغير الحل إذا تغيرت إحدى العناصر التالية:

1 - المعاملات في دالة الهدف ⟵ المدى القصير.

2 - المعاملات في القيود ⟵ المدى الطويل.

3 - الكميات المتاحة من الموارد ⟵ المدى القصير.

- فتحليل الحساسية إذن هو كيفية تحديد المجالات التي لن يتغير فيها الحل، ويتم تحديد هذه المجالات وفقا للطريقة التالية:

مثال:

ينتج مصنعا للأثاث 04 أنواع من المكاتب م$_1$ ، م$_2$ ، م$_3$ ،م$_4$ ، كل نوع يمر على ورشة النجارة ثم ورشة التمليس والزخرفة، الزمن المتاح في الورشة الأولى يقدر بـ:6000 سا، والورشة الثانية بـ:4000 سا، يقدر الربح في النوع الأول بـ:12 دج، الثاني 20 دج، الثالث 18 دج، والرابع 40 دج.

يوضح الجدول الموالي الزمن بالساعة الذي يحتاجه كل نوع في كل ورشة.

المنتوجات / الورشات	م$_1$	م$_2$	م$_3$	م$_4$
الورشة الأولى	4	9	7	10
الورشة الثانية	1	1	3	40

المطلوب:

1. ماهو الإنتاج الأمثل من هذه الأنواع الأربعة لتحقيق أعظم ربح ممكن؟
2. ماذا لو ارتفع الربح الوحدوي لـ: م$_1$ بـ: 2 دج؟
3. ماذا لو انخفض الربح الوحدوي لـ: م$_1$ بـ: 4 دج؟
4. ماذا لو ارتفعت الطاقة الإنتاجية للورشة الثانية بـ: 1000 ساعة؟

الحل:

النموذج الرياضي:

$MaxZ = 12$

$4x_1 + 9x_2 +$

$x_1 + x_2 + 3x$

x_1, x_2, x_3, x_4

1. الجدول الأخير:

			12	20	18	40	0	0
								x
12 40			1 0	$^{7}/_{3}$ $^{-1}/_{30}$	$^{5}/_{3}$ $^{1}/_{30}$	0 1	$^{4}/_{15}$ $^{-1}/_{150}$	$^{-1}/_{15}$ $^{4}/_{150}$
$Z= {}^{56000}/_{3}$			0	$^{20}/_{3}$	$^{10}/_{3}$	0	$^{44}/_{15}$	$^{4}/_{15}$

2. تحليل الحساسية للنوع x_1:

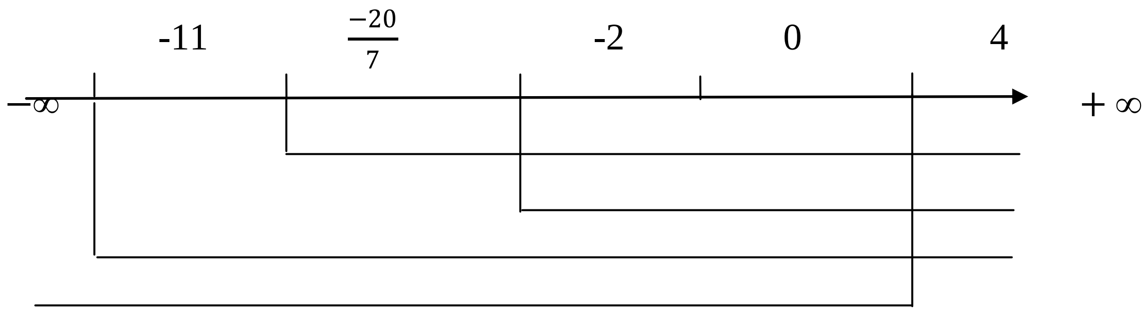
Δx ⟶	1			0		
Z ⟶	0			0		

$$\Delta\left(\frac{7}{3}\right) + \frac{20}{3} \geq 0 \Rightarrow \Delta\frac{7}{3} \geq \frac{-20}{3} \Rightarrow \Delta \geq \frac{-20}{7}$$

$$\Delta\left(\frac{5}{3}\right) + \frac{10}{3} \geq 0 \Rightarrow \Delta\frac{5}{3} \geq \frac{-10}{3} \Rightarrow \Delta \geq -2$$

$$\Delta\left(\frac{4}{15}\right) + \frac{44}{15} \geq 0 \Rightarrow \Delta\frac{4}{15} \geq \frac{-44}{15} \Rightarrow \Delta \geq -11$$

$$\Delta\left(\frac{-1}{15}\right) + \frac{4}{15} \geq 0 \Rightarrow \Delta\frac{-1}{15} \geq \frac{-4}{15} \Rightarrow \Delta \leq 4$$



ومنه مجال التغير لـ x_1 هو:

$$\Rightarrow \quad \Delta \in [+12 - 2, 12 + 4] \Rightarrow \quad \Delta \in [10,16]$$

لو ارتفع الربح الوحدوي لـ x_1 بـ: 2 دج

الحل لا يتغير $\longrightarrow$ $12+2=14 \in [10,16]$

لو انخفض الربح الوحدوي لـ: x_1 بـ:4 دج

الحل يتغير $\longrightarrow$ $12-4=8 \notin [10,16]$

تحليل الحساسية بالنسبة للموارد (e_2 الموارد)

$$\Delta\left(\frac{-1}{15}\right)+\frac{4000}{3}\geq 0 \quad \Rightarrow \frac{-\Delta}{15}\geq\frac{-4000}{3} \quad \Rightarrow \Delta\leq 20.000$$

$$\Delta\left(\frac{4}{150}\right)+\frac{200}{3}\geq 0 \quad \Rightarrow \Delta\frac{4}{150}\geq\frac{-200}{3} \quad \Rightarrow \Delta\geq -2500$$

$$\Delta\in[4000-2500{,}4000+20.000] \quad \Rightarrow \Delta\in[1500{,}24000]$$

لو ارتفعت الطاقة الإنتاجية للورشة الثانية بـ:1000 ساعة تصبح 5000 ساعة ومنه:

وبالتالي ليس هناك تأثير جوهري على الحل من جراء هذه الزيادة.

الحالات الخاصة للبرمجة الخطية

الحالة الأولى:

حالة عدم وجود حل ممكن، أي بقاء متغير اصطناعي في الحل.

ليكن لدينا النموذج الرياضي التالي:

$$\begin{cases} MaxZ=2x_1+5x_2 \\ x_1+x_2\leq 10 \\ 2x_1+3x_2\geq 84 \\ x_1,x_2\geq 0 \end{cases}$$

							x
5		10	1	1	1	0	0
-M		54	-1	0	-3	-1	1
Z=-54M+50			M+3	0	5+3M	M	0

هنا نلاحظ عدم وجود حل أمثل على الإطلاق نظرا لبقاء المتغير الاصطناعي في الحل.

الحالة الثانية: الحل غير المحدود أو الحل اللانهائي:

في هذه الحالة فإنه عند حساب قيمة المتغيرة الخارجة فإننا لن نجدها موجبة فإما تكون سالبة أو تؤول إلى مالانهاية.
ليكن لدينا النموذج الرياضي التالي:

$$\begin{cases} MaxZ = 6x_1 + 4x_2 \\ x_1 \geq 10 \\ x_2 \geq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

								x
6		10	1	0	-1	0	1	0
4		12	0	1	0	-1	0	1
Z= 108			0	0	-6	-4	M+6	M+4

المسألة ليس لها حل واحد أي أن لها عدد لا مهائي من الحلول نظرا لوجود القيمتين ∞، 10- عند حساب المتغيرة الخارجة.

الحالة الثالثة: الحالة الإنحلالية أو حالة عدم الانتظام:
في هذه الحالة عند حساب المتغيرة الخارجة نجد قيمتان متساويتان، وبالتالي الاختيار يكون عشوائيا، ونفس الشيء في حالة إيجاد قيمتين متساويتين في سطر التقييم، وذلك لاختيار المتغيرة الداخلة.

تقييم طريقة البرمجة الخطية:
إيجابياتها:
- تساعد على إيجاد الحل لمسائل معقدة وكبيرة الحجم.
- الاستخدام الأمثل لموارد المؤسسة.
- تعد وسيلة لتعليم المسيرين الجدد وزيادة الكفاءة.
- إمكانية تعديل الحل الأمثل بواسطة تحليل الحساسية.

سلبياتها:

- لا تعطي أهمية لبعض العوامل التي لا يمكن قياسها.
- يتطلب التحليل كمية من المعلومات التي قد يصعب الحصول عليها.
- حل المشاكل الكبيرة يحتاج إلى وقت كبير.

التطبيقات الميدانية:

- مشكل المزيج الإنتاجي .
- تخصيص الموارد المحدودة.
- تشغيل العمالة.
- تخطيط الإنتاج.
- الاستغلال الأمثل لمجموعة من الموارد.

المحاضرة السادسة

مسألة النقل "Problème de transport":

1. **تعريف:** هي حالة خاصة من البرمجة الخطية، تدرس التوزيع الأمثل للموارد من خلال توضيح كيفية توزيع أو نقل كميات من المصادر الإنتاجية "المراكز" إلى المخازن، وذلك لتحقيق هدف ما، عادة ما يكون تخفيض تكاليف النقل إلا أنه قد يدرس التعظيم مثل تعظيم الإيرادات، ومن شروط هذه المسألة:

- أن يكون هناك مجموعة من الطاقات يمكن استخدامها، وتسمى بالمصادر.
- أن تكون هناك عدة أوجه لاستغلال هذه الطاقات، وتسمى مراكز الاستقبال.
- يجب أن يتساوى مجموع المعروض من الطاقات مع مجموع المطلوب منها.
- أن تكون هناك قيمة سواء كانت تكلفة أو زمن أو إيراد.
- أن يكون هناك هدف واحد.
- تجانس المواد.

ويمكن إرجاع الجذور التاريخية لأساليب النقل إلى عام 1941 عندما نشر هيتشوك "Hitchok" دراسة بعنوان "توزيع السلعة من مصادر متعددة إلى مواقع متعددة" وبعده وبالذات في عام 1947 نشر كوبمان "Koopmans" دراسة تحت عنوان "الاستثمار الأمثل لنظام النقل"، وتعتبر هاتان الدراستان نقطة انطلاق في تطوير طرق النقل المعتمدة في عصرنا الحالي.

2. **النموذج الرياضي لمسألة النقل:**

يتشكل من دالة الهدف والقيود.

أ. بالنسبة لدالة الهدف: قد تشمل التعظيم أو التخفيض.

Cij: تمثل تكلفة نقل الكمية الموزعة من المصدر i إلى مركز الاستقبال j.

Xij: تمثل الكميات الموزعة من المصدر i إلى مركز الاستقبال j.

ب. بالنسبة للقيود:

القيد الأول: تساوي العرض مع الطلب أي: $\sum ai = \sum bj$، حيث أن a_{i} يمثل الطلب b_j يمثل العرض.
القيد الثاني: تساوي الكميات المنقولة من المراكز مع الطاقات الإنتاجية لتلك المراكز أي: $\sum xij = a_i$.
القيد الثالث: تساوي حجم الطلب مع ما يحصل عليه كل مستهلك أي: $\sum xij = b_j$.
القيد الرابع: شرط عدم السلبية أي أن كل الكميات تكون موجبة $Xij \geq 0$

تكوين النموذج الرياضي في شكل جدول.

مراكز الاستقبال المصادر				$\sum$
	C		C	
		C		
			C	
$\sum$				

حيث:
x_{11}: الكمية المنقولة من المصدر الأول إلى مركز الاستقبال الأول.
C_{11}: التكلفة الوحدوية للنقل من المصدر الأول إلى مركز الإستقبال الأول.

طرق الحل:

هناك عدة طرق لحل مسألة النقل:

1. طريقة زاوية الشمال الغربي .
2. طريقة أدنى عنصر في السطر.
3. طريقة أدنى عنصر في العمود.
4. طريقة أدنى عنصر في الجدول.
5. طريقة الجزاء (طريقة فوجال "*Vogel*").

مثال توضيحي:

تمتلك شركة للتجهيزات المنزلية ثلاثة مصانع x_1، x_2، x_3 لإنتاج الثلاجات وهذه المصانع تقع في ثلاثة أماكن جغرافية مختلفة، يتم شحن الإنتاج من المصانع إلى ثلاثة مخازن y_1، y_2، y_3 تقع في مناطق مختلفة.
لنفترض أن النقل من المصانع إلى المخازن يتم بالتكاليف التالية للثلاجة الواحدة:

- من المصنع x_1 إلى المخازن y_1، y_2، y_3 بتكاليف هي 4، 8،8 على التوالي.
- من المصنع x_2 إلى المخازن y_1، y_2، y_3 بتكاليف هي 16، 24، 16 على التوالي.
- من المصنع x_3 إلى المخازن y_1، y_2، y_3 بتكاليف هي 8، 16، 24 على التوالي.
- إذا علمنا أيضا أن الطاقة الإنتاجية للمصانع هي: 56، 82، 77 على التوالي.
- إذا علمنا أيضا أن الطاقة التخزينية للمخازن هي: 72، 102، 41 على التوالي.
- حدد الخطة الواجب اتباعها لنقل الانتاج من المصانع إلى المخازن حيث تكون التكاليف أقل ما يمكن.

1 - **طريقة زاوية الشمال الغربي:**

مراكز الاستقبال / المصادر				$\sum$
	56 $\boxed{4}$	/ $\boxed{8}$	/ $\boxed{8}$	56
	16 $\boxed{16}$	66 $\boxed{24}$	/ $\boxed{16}$	82
	/ $\boxed{8}$	36 $\boxed{16}$	41 $\boxed{24}$	77
$\sum$	72	102	41	215

$$\Longrightarrow \quad Z = 3624$$

ملاحظة: حتى يكون الحل أولي يتوجب أن يكون عدد الخانات المملوءة يساوي عدد الأعمدة +عدد الأسطر – 1 .
أما إذا كان عدد الخانات المملوءة لا يساوي هذه القيمة فإن الحل ناقص.

عدد الخانات المملوءة $\longrightarrow$ m+n-1=3+3-1=5

ومنه نقول أن الحل أولي.

- نلاحظ أن هذه الطريقة سهلة لكنها تهمل التكاليف عند عملية التوزيع.

2 -طريقة أدنى عنصر في السطر:

مراكز الاستقبال / المصادر				$\sum$
	56 $\boxed{4}$	/ $\boxed{8}$	/ $\boxed{8}$	56
	16 $\boxed{16}$	25 $\boxed{24}$	41 $\boxed{16}$	82
	/ $\boxed{8}$	77 $\boxed{16}$	/ $\boxed{24}$	77
$\sum$	72	102	41	215

ملاحظة: في حال تساوي التكاليف نختار الخانة التي توزع بها أكبر كمية.

3 -طريقة أدنى عنصر في العمود:

مراكز الاستقبال / المصادر				$\sum$
	56 $\boxed{4}$	/ $\boxed{8}$	/ $\boxed{8}$	56
	/ $\boxed{16}$	41 $\boxed{24}$	41 $\boxed{16}$	82
	16 $\boxed{8}$	61 $\boxed{16}$	/ $\boxed{24}$	77
$\sum$	72	102	41	215

4 - طريقة أدنى عنصر في الجدول:

مراكز الاستقبال / المصادر				∑
	56 [4]	/ [8]	/ [8]	56
	/ [16]	41 [24]	41 [16]	82
	16 [8]	61 [16]	/ [24]	77
∑	72	102	41	215

Z=2968

5 - طريقة الجزاء (طريقة فوجال "Vogel"التقريبية) VAM:

مراكز الاستقبال / المصادر				∑	
	/ [4]	56 [8]	/ [8]	56	4 0 .
	/ [16]	41 [24]	41 [16]	82	0 8 8 2 4 .
	72 [8]	5 [16]	/ [24]	77	8 8 8 16 .
∑	72	102	41	215	
	4 .	8 8 8 8 .	8 8 8 .		

<u>**المحاضرة السابعة**</u>

<u>مراقبة أمثلية الحل.</u>

بعد تأكدنا من كون الحل المتحصل عليه بإحدى الطرق السابقة هو حل أولي نقوم بمراقبة أمثلية الحل وإمكانية تحسين النتائج المتحصل عليها قصد الوصول إلى الحل الأمثلبتخفيض التكاليف إلى أقصى درجة ممكنة.

ولمراقبة أمثلية الحل نقوم بالخطوات التالية:

1. نضيف سطر وعمود داخل الجدول، بحيث يتم حساب المعاملات المدخلة وفقا للعلاقة التالية:

$$Ii \;+\; Jj \;\;= Cij$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

التكلفة السطر العمود

2. حساب (Eij) الاقتصاد في التكاليف وفقا للعلاقة الرياضية التالية:

				$\sum$
		I	C x E	
		I	C x E	
$\sum$				

<u>ملاحظة:</u> إذا كان $Eij \geq 0$ فإن الحل أمثل أما إذا كان $Eij < 0$ فإن الحل ليس أمثلا ويجب تحسينه.

3. لتحسين الحل يجب إضافة " Δ" التي تشمل أصغر قيمة لـ" Eij" أي أصغر قيمة سالبة ثم تشكيل مسار مغلق بإضافة وطرح "Δ" وفقا للشروط التالية:

أ. نضيف "Δ" في الخانة الفارغة بإشارة "+" ثم نطرحها في الخانة الموالية ونضيفها في الخانة الثالثة ونطرحها في الرابعة مع احترام المسار المغلق.

ب. يجب أن تقع "Δ" في زوايا قائمة

ت. نختار قيمة "Δ" معادلة لأصغر قيمة لـ: Xij حيث تكون إشارة Δ سالبة.

<u>مثال توضيحي:</u> <u>العودة إلى المثال السابق.</u>

<u>مراقبة أمثلية الحل: طريقة أدنى عنصر في الجدول.</u>

		4	12	4
	0	4 56-Δ 0	8 +Δ 4	8 -4
	12	16 0	24 41 0	16 41 0
	4	8 16+Δ 0	16 61-Δ 0	24 -16

هناك قيمة واحدة $Eij < 0$ ومنه الحل ليس أمثلا.

		0	8	0
	0	4 -4	8 56 0	8 -8
	16	16 0	24 41 0	16 41 0
	8	8 72 0	16 05 0	24 -16

نلاحظ أن كل القيم $Eij \geq 0$ وبالتالي الحل أمثل.

<u>ملاحظة:</u> نلاحظ أن $E_{21} = 0$ رغم أنها فارغة وهذا يدل على أنه يوجب حل بديل حيث يمكن إيجاده بالطريقة التالية:

- نضيف Δ في الخانة الفارغة وتشكل مسار مغلق.
- نقوم بنفس العمليات الخاصة بتحسين الحل لنحصل على الحل البديل.

		0	8	0
	0	4 -4	8 56 0	8 -8
	16	16 41 0	24 0	16 41 0
	8	8 31 0	16 46 0	24 -16

<u>مسألة التعظيم باستخدام طريقة النقل:</u>

لمعالجة هذا النوع من المسائل هناك طريقتين:

<u>أولا:</u> نحول مصفوفة العوائد (أرباح، مبيعات ، فوائد،...) إلى مصفوفة تكاليف ثم نقوم بالحل وفقا للطرق المعروفة، ولتحويلها إلى مصفوفة تكاليف، نختار أكبر عنصر في الجدول ونطرح منه بقية العناصر.

<u>ثانيا:</u> نترك مصفوفة العوائد كما هي، ونتبع إحدى الطرق التالية:

1. طريقة أكبر عنصر في الجدول.
2. طريقة فوجال التقريبية للتعظيم.

وتختلف هذه الطريقة عن نظيرتها للتخفيض في كون الفارق يحسب بين أكبر عائد والعائد الذي يليه.
وللحكم على أمثلية الحل، يجب أن تكون عناصر $\boldsymbol{0 < Eij}$.

<u>مثال توضيحي:</u> نفترض أن لدينا مشكلة تعظيم العائد لمصفوفة أرباح معطاة على الشكل التالي:

					$\sum$
		4	12	20	
	0	4 56 0	8 / 4	8 / 12	56
	12	16 / 0	24 82 0	16 / 16	82
	4	8 16 0	16 20 0	24 41 0	77
$\sum$		72	102	41	215

<u>ملاحظة:</u> بما أن كل العناصر $\boldsymbol{E_{ij} \geq 0}$ فإن الحل أمثل.

الحالات الخاصة لمسألة النقل:

1. حالة عدم تساوي العرض مع الطلب:

في هذه الحالة يتوجب إضافة سطر أو عمود وهمي بحيث تكون التكاليف الخاصة به معدومة.

مثال توضيحي: سمحت إجراءات التوسيع التي عرفها المخزن الثالث برفع طاقته التخزينية إلى 70 ثلاجة.

المطلوب: أوجد التوزيع الجديد في ظل المعطيات الجديدة.

نستعمل طريقة أدنى عنصر في الجدول.

					$\sum$
		4	12	4	
	0	4 56-Δ 0	8 /+Δ +4	8 -4	56
	12	16 / 0	24 12 0	16 70 0	82
	4	8 16+Δ 0	16 61-Δ 0	24 / -16	77
	12	0 / -8	0 29 0	0 / -8	29
$\sum$		72	102	70	244

$$m+n-1=6$$

$$Z=2756$$

الحل ليس أمثل ⟵ $E_{12}<0$

					$\sum$
		0	8	0	
	0	4 -4	8 56 0	8 -8	56
	16	16 0	24 12 0	16 70 0	82
	8	8 72 0	16 5 0	24 -16	77
	8	0 -8	0 29 0	0 -8	29
$\sum$		72	102	70	244

الحل أمثل ⟵ $E_{ij}\geq 0$

2. **حالة الطرق الممنوعة:**

في هذه الحالة فإن الحل يتطلب التقيد بشروط معينة، تتمثل في عدم التوزيع من مصدرمعين إلى مستهلك ما، وذلك لأسباب معينة.

لمعالجة هذا المشكل نعطي أكبر تكلفة في الجدول للخانة التي يتقاطع فيها محوري الطريق الممنوع، وهذا في حالة التخفيض **Min**، أما في حالة التعظيم **Max**، نعطي لتلك الخانة أقل قيمة في الجدول.

مثال توضيحي:

لسوء حظ المؤسسة السابقة فقبل الانتهاء من أشغال توسيع المخزن الثالث برفع قدراته إلى 70 وحدة، وما يترتب عن ذلك من تقلص التكاليف إلى 2512 دج، ظهرت مدخلة جديدة في معطيات المسألة، حيث لم يعد بالإمكان توجيه منتوجات المصنع الثاني إلى المخزن الثالث بسبب إنهيار الجسر الرابط بين النقطتين.

المطلوب: أوجد التوزيع الجديد في ظل المعطيات الجديدة.

الحل بطريقة الجزاء والعقاب:

					∑	
		0	8	8		
	0	4 / -4	8 15 0	8 41 0	56	4 4 8 8 .
	16	16 / 0	24 82 0	25 / -6	82	8 8 2 4 .
	8	8 72 0	16 5 0	24 / -8	77	8 8 16 16 .
∑		72	102	41	215	
		4 4 .	8 8 8 8 .	16 .		

$E_{ij} \geq 0$ ⟵ **الحل أمثل**

الحالة الإنحلالية:

نصادف هذه الحالة في حال كون الحل الناتج غير أولي أي: $\boldsymbol{m+n-1 > x_{ij}}$، ومنه يتوجب إضافة " □ " وهو عدد صغير يؤول إلى الصفر أي: $x_{ij} = □ \pm \mathbf{x_{ij}}$، حيث نضيف هذا العدد إلى إحدى خانات الجدول بحيث لا يشكل مسارا مغلقا.

<u>مثال توضيحي:</u> ليكن لدينا الجدول التالي:

<u>طريقة أدنى عنصر في الجدول:</u>

$m+n-1=4\neq 3$ "x_{ij}" ومنه الحل ليس أولي

نضيف " □ " إلى "$\boldsymbol{x_{21}}$".

$E_{ij} \geq 0$ ⟵ **الحل أمثل**

		1	14	6	
	0	1 10 0	24 / -10	6 2 0	12
	1	2 □ 0	15 4 0	7 / 0	4
		10	4	2	16

<u>قائمة المراجع</u>

1/ السعدي رجال، **بحوث العمليات**. دار رجزو، قسنطينة، ط1، 2004.

2/ محمد توفيق ماضي، **الأساليب الكمية في الادارة**. الدار الجامعية، الاسكندرية،1998.

3/ علي حسين علي و آخرون، **بحوث العمليات و تطبيقلتها في وظائف المنشأة**. دار زهران، عمان،1999.

4/ خالد مدغوط، **البرمجة الخطية**. مديرية الكتب و المطبوعات، حلب، 1986.

5/ أديب كولو، **بحوث العمليات التقنيات الكمية في الادارة**. مطبعة طربين، دمشق، 1998.