الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة الحاج لخضر
باتنة

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

السنة الثانية ل م د
تخصص محاسبة ومالية

محاضرات مقياس
رياضيات المؤسسة

من اعداد الدكتورة:
يحياوي الهام

برنامــج المقيــاس:

الفصل الأول: البرمجة الخطية (*Programmation linéaire*)

الفصل الثاني: النقل (*Transport*)

الفصل الثالث: التعيين (*Affectation*)

الفصل الأول: البرمجــة الخطيــة

1- تعريف البرمجة الخطية:

يتكون مفهوم البرمجة الخطية من كلمتين هما:

- *البرمجة:* تعني البحث عن البرنامج الذي يحقق الهــدف المطلــوب أي التقنيــة الرياضــية المستخدمة لإيجاد الحل الأمثل.
- *الخطية:* تعني أن جميع العلاقات بين متغيرات النموذج الرياضي خطية (خط مستقيم)، أي تغير قيمة المخرجات تبعا لتغير قيمة المدخلات بنفس النسبة.

أما تعريف البرمجة الخطية كإحدى طرق رياضيات المؤسسة، فإنهــا أداة أو أســلوب رياضي يقوم على التوزيع الأمثل للموارد البشرية والمادية المتميزة بصفتي الندرة والمحدودية بهدف تحقيق أعظم عائد أو أدنى تكلفة ضمن النموذج الرياضي المتكون من دالة الهــدف والقيود.

2- شروط استخدام البرمجة الخطية:

قبل تطبيق هذه الطريقة، لابد أن تتوفر عدة شروط (خصائص) للظاهرة المدروسة وهي:

- وضوح الهدف: يجب أن يكون للمشكلة (الظاهرة) المدروسة هدفاً واضحاً ومحدداً؛
- محدودية الموارد البشرية والمادية الخاضعة للبرمجة؛
- توفر استخدامات متنافسة للموارد موضوع البرمجة؛
- إمكانية التعبير عن المتغيرات موضوع البرمجة بصورة كمية (عددية)؛
- أن تكون العلاقة بين المتغيرات الخاضعة للبرمجة علاقة خطية (خط مستقيم).

3- خطوات تكوين برنامج مسألة البرمجة الخطية:

يتطلب حل مشكلة البرمجة الخطية القيام بتحليلها في شكل عدة خطوات للتمكن من تتبع المشكلة وكيفية تكوينها في شكل برنامج خطي. وتتمثل هذه الخطوات فيما يلي:

1- تحديد طبيعة المشكلة (الهدف): تحديد نوعها إما التعظيم (*Max*) أو التخفيض (*Min*)؛

2- تحديد نوع المتغيرات (*X*،*Y*،...): التي تمثل المجاهيل للظاهرة المدروسة؛

3- تحديد دالة الهدف: صياغة تأثير المتغيرات على الهدف في شكل رياضي (معادلة)؛

4- تحديد القيود والحدود: أي شروط و ظروف المؤسسة في شكل متراجحات ومعادلات؛

5- التكوين النهائي للمشكلة : أي تلخيصها في شكل نموذج رياضي يشمل دالة الهدف والقيود.

4- النموذج الرياضي للبرمجة الخطية:

تعتبر عملية تشكيل النموذج الرياضي الخطوة الأولى لحل المسائل بطريقة البرمجة الخطيـــة، وهي تهدف إلى عرض وتوضيح المشكلة بطريقة رياضية تمكن من إيجاد الحل الأمثل. فالوصول إلى الحل الأمثل يتطلب وضع النموذج الرياضي بشكل صحيح.

ويتكون النموذج الرياضي من ثلاثة عناصر متكاملة هي:

1- **دالة الهدف (الدالة الاقتصادية):** وتمثل الهدف الرئيسي للمشكلة المتعلـــق بالأمثليـــة وتكتب هذه الدالة وفق الصيغة الرياضية التالية: $Opt \quad f(x)=\sum_{j=1}^{n} C_j X_j$

حيث أن:

Opt: تعني الأمثلية (*Optimalité*)، أي إما التعظيم (*Max*) أو التخفيض (*Min*).

C_j: معاملات دالة الهدف، أي إما العائد الوحدي أو التكلفة الوحدوية لكل منتوج.

X_j: رموز للكميات (عدد الوحدات) المنتجة لكل منتوج وهي المجاهيل التي نبحث عليها.

j : مؤشر لعدد متغيرات (مجاهيل) النموذج والمقدرة بـــ (n).

2- **القيود:** وهي عبارة عن الشروط (الظروف) التي تتواجد فيها المؤسسة، ويعبر عنها رياضياً في شكل معادلات أو متراجحات ذات الصيغة الرياضية التالية: $\sum aij X_j (\geq,=,\leq) b_i$

حيث أن:

aij:المعاملات الفنية أي الكميات المستهلكة من الموارد(الطاقات الإنتاجية)للإنتاج الوحدوي من المنتوجات.

bi: الكميات المتاحة من الموارد.

i : عدد الأسطر وهي بعدد القيود (m).

j: عدد الأعمدة وهي بعدد المتغيرات أي المجاهيل (n).

وللإشارة، فإن مسائل البرمجة الخطية يمكن تمثيلها وفق ثلاث صيغ هي:

➢ *الصيغة العامة (المختلطة):*

عادة ما تكتب البرامج الخطية في بداية وضعها على شكل صيغة عامة تحتوي على كل الإشارات ($\leq,=,\geq$)أي:

$$\sum a_{ij} X_j \leq b_i$$
$$\sum a_{ij} X_j \geq b_i$$
$$\sum a_{ij} X_j = b_i$$

➢ *الصيغة القانونية:*

هي الصيغة التي تحتوي على إشارتي ($\leq$) أو ($\geq$) فقط.

- فإذا كانت الصيغة تحتوي على إشارة أقل أو يساوي ($\geq$)، أي نبحث عن التعظيم (Max):

$$\sum a_{ij} X_j \leq b_i$$

-أما إذا كانت الصيغة تحتوي على إشارة أكبر أو يساوي($\leq$)، أي نبحث عن التخفيض (Min):

$$\sum a_{ij} X_j \geq b_i$$

➢ *الصيغة المعيارية:*

هي التي تحتوي على إشارة (=) فقط، أي: $\sum a_{ij} X_j = b_i$.

3- **شرط (قيد) عدم السلبية:** أي أن جميع قيم المتغيرات يجب أن تكون موجبة أو منعدمة أي: $X_j \geq 0$ ، لأنه لا يمكن صنع منتوجات سالبة.

مثال:

مشكلة التعظيم (Max) **مشكلة التخفيض (Min)**

دالة الهدف: $Min\ Z = X + 5Y$

القيود:

$$2X + Y \le 10.$$
$$Y = 10.$$
$$X, Y \ge 0.$$

دالة الهدف: $Max\ Z = 2X + Y$

القيود:

(اليد العاملة، الآلات، المواد، الطلب،...)

$$X + Y \le 40.$$
$$X \ge 10.$$
$$X + Y = 30.$$

قيم عدم السلبية: $X, Y \ge 0.$

5- طرق حل مسائل البرمجة الخطية:

يستعمل لحل مسائل البرمجة الخطية عدة طرق مختلفة بإتباع خطوات متتالية وانطلاقا من الحل المبدئي (الأولي) إلى غاية بلوغ الحل الأمثل. ومن أهم هذه الطرق نذكر:

5-1- الطريقة البيانية (طريقة الرسم البياني):

تستخدم هذه الطريقة بشكل واسع في توضيح مفاهيم البرمجة الخطية كدالة الهدف، القيود، منطقة الحلول الممكنة والحل الأمثل.

وتعتمد هذه الطريقة على الرسم البياني لإيجاد الحل الأمثل وذلك بإتباع الخطوات التالية:

1- كتابة النموذج الرياضي للمشكلة المدروسة.

2- تحويل المتراجحات إلى معادلات.

3- رسم محوري السينات (X) والعينات (Y).

4- رسم المعادلات على المحورين في شكل خطوط مستقيمة.

5- استنتاج منطقة الحلول الممكنة من خلال نقاط التقاطع بين المستقيمات.

6- استنتاج الحل الأمثل و الذي يمثل النقطة التي تعطي الحل الأمثل (أكبر قيمة لدالة الهدف في حالة التعظيم (Max) أو أدنى قيمة لها في حالة التخفيض (Min)).

- استخدام الطريقة البيانية لحل مشكلة التعظيم(Max):

مثال:

تنتج مؤسسة نوعين من أثاث المكاتب هما: مكتبات نرمز لها بـ B و طاولات نرمز لها بـ T. ويتطلب صنع هذين المنتوجين المرور على قسمين هما: قسم التجميع ويرمز له بـ C وقسم التجهيز النهائي ويرمز له بـ D . وتقدر الطاقة الإنتاجية لقسم التجميع بـ 60 ساعة

ولقسم التجهيز النهائي بـــ 48 ساعة، حيث أن كل مكتبة تحتاج لأربع ساعات في قسم التجميع وساعتين في قسم التجهيز النهائي، بينما تحتاج كل طاولة لساعتين في قســـم التجميـــع وأربـــع ساعات في قسم التجهيز النهائي.

إضافة إلى أن العائد الوحدوي لكل مكتبة يقدر بـــ 8 دج وكل طاولة بـــ 6 دج.

المطلوب: تحديد عدد المكتبات وعدد الطاولات التي يجب إنتاجها لتحقيق أكبر عائد ممكن (ماهي الخطة المثلى للإنتاج)؟

الحـــل:

قبل تطبيق الطريقة البيانية لحل هذه المشكلة يجب:

- أولا توضيح رموز النموذج الرياضي الذي سيتم تشكيله وهي المجاهيل التي نبحث عن قيمهـــا كما يلي:

نفترض أن: X: عدد الوحدات (الكميات) المنتجة من المكتبات (B).

Y: عدد الوحدات (الكميات) المنتجة من الطاولات (T).

- ثانيا بناء النموذج الرياضي للمشكلة والمتكون من:

1- دالة الهدف: نلاحظ أن المعلومات حول العوائد أي الهدف هو التعظيم (Max)، حيـــث أن العوائد الوحدوية لكل منتوج معطاة في المثال، وبالتالي نكتب دالة الهدف كما يلي:

$$Max\ Z = 8\ X + 6\ Y$$

2- القيود: عبارة عن الشروط أو الظروف التي تتواجد فيها المؤسسة، وهي عبـــارة عـــن قيـــود الطاقات الإنتاجية للآلات أو اليد العاملة أو المواد أو الطلب أو الأموال المستثمرة.

وفي هذا المثال يوجد نوع واحد فقط من القيود والخاص بالطاقة الإنتاجية للآلات، ومنه:

قيد الطاقة الإنتاجية لقسم التجميع (C)هو: ... $4X + 2Y \leq 60$

قيد الطاقة الإنتاجية لقسم التجهيز النهائي (D) هو: ... $2X + 4Y \leq 48$

3- شرط عدم السلبية: أي الكميات المنتجة من BوTإما موجبة أو معدومة، ومنه: $X, Y \geq 0$

إذن النموذج الرياضي لهذه المسألة هو:

$$\begin{cases} Max\ Z = 8X + 6Y \\ 4X + 2Y \leq 60 \\ 2X + 4Y \leq 48 \\ X, Y \geq 0 \end{cases}$$

ولحل هذا النموذج الرياضي (باستخدام الطريقة البيانية)، نتبع بقية الخطوات المذكورة سابقا.

لرسم القيود يجب:- أولاً تحويل المتراجحات إلى معادلات، أي: $4X + 2Y = 60 \ldots(1)$

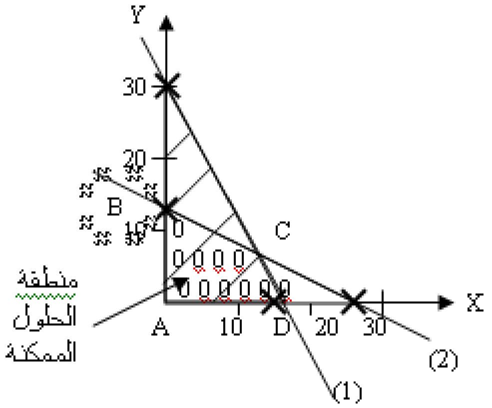
$2X + 4Y = 48 \ldots(2)$

- ثانيا نستنتج قيم X و Y للمعادلتين على محوري (X) و (Y) كما يلي:

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} X = 0 \rightarrow Y = 30 \\ Y = 0 \rightarrow X = 15 \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow \begin{cases} X = 0 \rightarrow Y = 12 \\ Y = 0 \rightarrow X = 24 \end{cases}$$

الآن نرسم المستقيمين وفق قيم (X) و (Y) كمايلي:



بعد رسم المستقيمين (1) و(2) نحدد مجال الحل لهما والنقاط المشتركة بينهما تسمى منطقة الحلول الممكنة، أي أن نقاط هذه المنطقة هي $(A\ B\ C\ D)$ التي تسمح لنا بتحديد الحل الأمثل وهو النقطة C لأنها نقطة تقاطع بين المستقيمين (1) و (2).

وللتأكد من ذلك، نقوم بالتعويض في النموذج الرياضي كما يلي:

- عند النقطة A $(0،0)$:

$$(A) \begin{cases} Z = 0 \\ 0 < 60 \\ 0 < 48 \\ (0, 0) = (0, 0) \end{cases}$$

- عند النقطة B $(12 ،0)$:

$$\begin{cases} Z = 72 \\ 24 < 60 \\ 48 = 48 \\ (0, 12) \geq (0, 0). \end{cases}$$

- عند النقطة D $(0 ،15)$:

$$\begin{cases} Z = 120 \\ 24 < 60 \\ 48 = 48 \end{cases}$$

$$(15,0) \geq (0,0)$$

- عند النقطة C(؟،؟) :

بما أن C هي نقطة تقاطع بين (1) و(2) نحل جملة معادلتين نجد إحداثياتها $(12$، $6)$ ومنه:

$$\begin{cases} Z = 132 \\ 60 = 60 \\ 48 = 48 \\ (12,6) > (0,0) \end{cases}$$

نلاحظ من خلال هذه الحلول الممكنة أن قيمة دالة الهدف (Z) ارتفعت من الصـــفر (0) وهو الحل المبدئي إلى غاية $Z = 132$ وهي أكبر قيمة، أي عند النقطة (C) تحقق الحـــل الأمثـــل. بمعنى أن خطة الإنتاج المثلى هي أنه يجب إنتاج: 12 مكتبة و6طاولات لتحقيق أعظم ريح يقـــدر بـــ 132دج مع الاستغلال التام للطاقة الإنتاجية في القيدين.

ملاحظة: **في نقطة الحل الأمثل ليس شرط الاستغلال التام للطاقات الإنتاجية للقيود بل يكفـــي تحقيق دالة الهدف (أكبر قيمة في حالة *Max* وأدنى قيمة في حالة *Min*).**

- استخدام الطريقة البيانية لحل مشكلة التخفيض (Min):

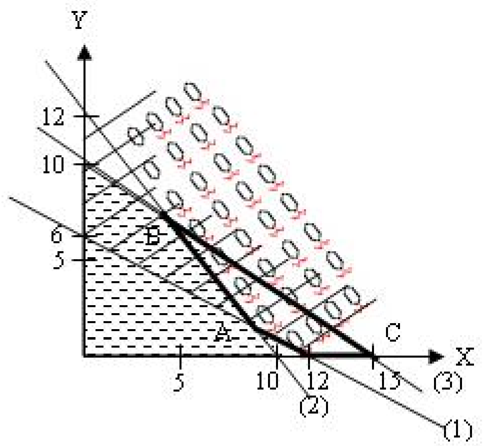
مثال:

$$\begin{cases} Min\ Z = 18X + 10Y & \\ 4X + 8Y \geq 48 & (1) \\ 12X + 10Y \geq 12 & (2) \\ 10X + 15Y \leq 150 & (3) \\ X,Y \geq 0 & \end{cases}$$

$(1) \rightarrow 6 = Y$ ، $12 = X$

$(2) \rightarrow 12 = Y$ ، $10 = X$

$(3) \rightarrow 10 = Y$ ، $15 = X$



$A = (1) \cap (2) = (8.57,\ 1.71) \rightarrow Z = 171.36.$

$B = (2) \cap (3) = (3.75,\ 7.5) \rightarrow \boxed{Z = 142.5.}$

$D\ (12,\ 0) \rightarrow Z = 216.$

$C\ (15,\ 0) \rightarrow Z = 270.$

نلاحظ أن أصغر قيمة لدالة الهدف تحققت عند النقطة B وهي تمثل الحل الأمثل.

- الحالات الخاصة للطريقة البيانية:

1- حالة الحلول المتعددة (وجود أكثر من حل أمثل):

في بعض الحالات نجد أكثر من حل أمثل واحد .بمعنى وجود عدة حلـــول للمســـألة، أي تكون قيم دالة الهدف (Z) متساوية.

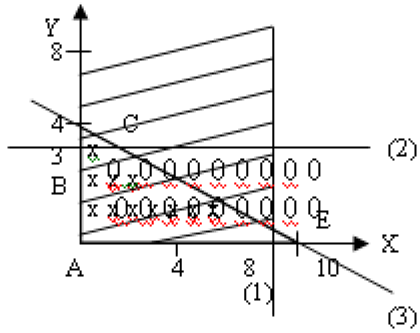
مثال:

$$\begin{cases} Max\ Z = 2X + 4Y \\ X \le 8 \quad (1) \\ Y \le 3 \quad (2) \\ 3X + 6Y \le 30 \ (3) \\ X, Y \ge 0 \end{cases}$$

$X = 8\ (1)$

$Y = 3\ (2)$

$\begin{cases} X = 10 \Leftarrow (3) \\ Y = 5 \end{cases}$



$A(0, 0)$ → $Z = 0$; $0 < 8$; $0 < 3$; $0 < 30$; $(0, 0) = (0, 0)$

$B(0. 3)$ → $Z = 12$; $0 < 8$; $3 = 3$; $18 < 30$; $(0, 3) \ge (0, 0)$

$E(8, 0)$ → $Z = 16$; $8 = 8$; $0 < 3$; $24 < 30$; $(8,0) \ge (0,0)$

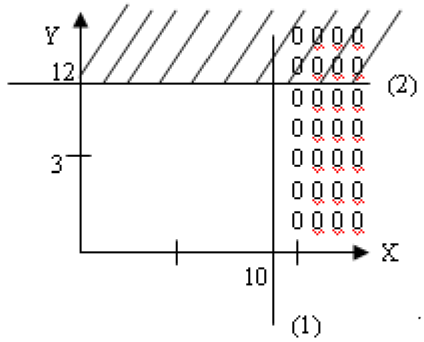
$C(?, ?) = (2) \cap (3)$	$D\ (?, ?) = (1) \cap (3)$
$= (4, 3)$	$= (8, 1)$
$Z = 20$	$Z = 20$
$4 < 8$	$8 = 8$
$3 = 3$	$1 < 3$
$30 = 30$	$30 = 30$
$(4, 3) > (0, 0)$	$(8, 1) > (0, 0)$

نلاحظ من خلال نقاط منطقة الحلول الممكنة وعند التعويض أن أكبر قيمة لدالة الهـــدف تحققت عند النقطتين C وD وهما يمثلان حلين أمثلين لأن قيمة Z أكبر ومتساوية ولو نختار بينهما سيتم التفاضل بين القيود في كلا الحلين.

2- حالة عدد لا نهائي من الحلول (دالة الهدف اللانهائية):

في هذه الحالة، فإن دالة الهدف تزداد بشكل غير نهائي دون المساس بالقيود.

مثال:



$$\begin{cases} MaxZ=6X+4Y \\ X \geq 10\ (1) \\ Y \geq 12\ (2) \\ X,\ Y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} X = 10\ (1) \\ Y = 12\ (2) \end{matrix}$$

نلاحظ من خلال الشكل أن منطقة الحلول الممكنة غير مستمرة تؤول إلى ما لا نهاية (∞) أي وجود عدد لانهائي من الحلول، مما يستوجب الرجـــوع إلى النموذج الرياضي وإعادة تصحيحه أو تعديله.

3- حالة عدم تأثير أحد القيود (الشروط) على منطقة الحلول الممكنة:

في هذه الحالة، نجد أن أحد القيود (الخط الذي يمثل هذا القيد) بعيداً عن منطقة الحلـــول الممكنة أي لا يؤثر على الحل الأمثل، بمعنى أنه يمكن حذفه من النموذج.

مثال:

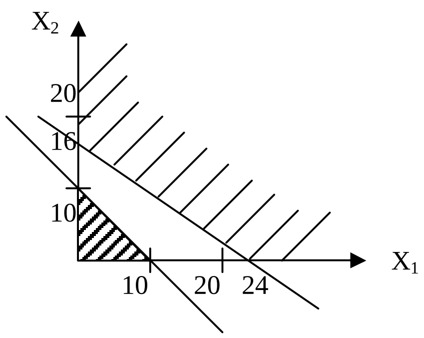
$$\begin{cases} Max\ Z = 12X + 8Y \\ 6X + 4Y \leq 24\ (1) \\ 2X + 4Y \leq 16\ \ (2) \\ Y \leq 7\ \ \ \ (3) \\ (X,\ Y) \geq (0,\ 0) \end{cases} \Leftarrow \begin{matrix} (1) & X = 4 \\ & Y = 6 \\ (2) & X = 8 \\ & Y = 4 \\ (3) & Y = 7 \end{matrix}$$

نلاحظ من الشكل أن منطقة الحلول الممكنة المحددة بالمستقيمين (1) و(2) لم تـــتغير لمـــا أضفنا القيد (3)، أي عدم تأثير القيد (3) على منطقة الحلول الممكنة. وبالتالي يمكن استبعاده من النموذج الرياضي وحل النموذج بالمعادلتين (1) و(2) فقط.

4- حالة عدم وجود الحلول:

في هذه الحالة فإن منطقة الحلول الممكنة لا يمكن تشكيلها، مما يستوجب تعديل النموذج.

مثال:



$$\begin{cases} MaxZ=2X_1+5X_2 \\ X_1 + X_2 \leq 10\ \ (1) \\ 2X_1 + 3X_2 \geq 48\ \ (2) \\ X_1,\ X_2 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} X_1 = 10 \\ X_2 = 10 \end{matrix}\ (1) \quad \begin{matrix} X_1 = 24 \\ X_2 = 16 \end{matrix}\ (2)$$

نلاحظ من الشكل عدم وجود منطقة الحلول الممكنة أي عدم وجود الحل الأمثـــل، **ممـــا** يستوجب إعادة النظر في النموذج سواء بزيادة قيود أخرى أو تصحيح القيود السابقة حتى تتكون منطقة الحلول الممكنة.

5- حالة وجود إشارة المساواة (=) في إحدى معادلات القيود:

نلاحظ في كل الأمثلة السابقة أن النماذج الرياضية تحتوي على المتراجحات فقط ($\leq$،$\geq$)، لكنه نجد نماذج تشمل كذلك المعادلات (=). فهذه الأخيرة تحدد منطقة الحلول الممكنة في قطعـــة مستقيمة (محددة المبدأ والنهاية) أو في نقطة واحدة.

مثال:

$$\begin{cases} Max\ Z = 6X + 8Y & \\ 30X + 20Y \leq 300 & (1) \\ 5X + 10Y \leq 110 & (2) \\ 4X - Y = 0 & (3) \\ X = 2 & (4) \\ X, Y \geq 0 & \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} 10 = X & \\ 15 = Y & (1) \\ 22 = X & \\ 11 = Y & (2) \\ 4X = Y & (3) \\ X = 2 & (4) \end{array}$$

نلاحظ من خلال الشكل أنه برسم (1) و(2) تحددت منطقة الحلول الممكنة، ثم برسم المستقيم (3) تقلصت المنطقة لتصبح في القطعة المستقيمة المحصورة بين (2) ونقطة المبدأ، ثم برسم المستقيم (4) تحدد الحل الأمثل في نقطة واحدة ذات الإحداثيات ($X = 2$، $Y = 8$) حيث $Z = 76$.

➢ ***تقييم الطريقة البيانية:***

يتم تقييم الطريقة البيانية في شكل مزايا (إيجابياها) وعيوب (سلبياها) كما يلي:

أ- مزايا الطريقة البيانية:

- سهولة استخدامها وبساطتها.
- توضيح بعض مفاهيم البرمجة الخطية.

ب- عيوب الطريقة البيانية:

- تستعمل فقط إذا كان عدد المتغيرات (X،Y،...) لا يزيد عن اثنين ونادرة التطبيق.
- تفترض الاستغلال التام للطاقة الإنتاجية (تحويل المتراجحات إلى معادلات مباشرة).
- استخلاص النتيجة بصفة تقريبية وغير مؤكدة 100%.

5-2- الطريقة الجبرية:

تستعمل هذه الطريقة بإتباع الخطوات التالية:

1- تحويل المتراجحات إلى معادلات.

2- حل جملة المعادلات بطريقة التعويض أو المحددات (المصفوفات) لإيجاد قيم المتغيرات ثم تعويضها في دالة الهدف لتحديد قيمتها.

مثال:

$$\begin{cases} Max\ Z = 4X + 5Y \\ 2X + 3Y \leq 40 \quad (1) \\ 3X + Y \leq 50 \quad (2) \\ X, Y \geq 0 \end{cases} \Leftarrow \quad \begin{aligned} 2X + 3Y &= 40 \quad (1) \\ 3X + Y &= 50 \quad (2) \end{aligned}$$

بحل جملة المعادلتين نجد:

$X = 15.71$

$Y = 2.85 \quad \Rightarrow \boxed{Z = 77.09\ .}$

➢ ***تقييم الطريقة الجبرية:***

أ - أهم مزايا الطريقة الجبرية هو سهولة استخدامها.

ب - عيوب الطريقة الجبرية:

- تفترض الاستغلال التام للطاقة الإنتاجية (تحويل المتراجحات إلى معادلات مباشرة).
- استخلاص النتيجة بصفة تقريبية وغير مؤكدة 100%.

5-3- طريقة السمبلاكس (المبسطة):

تعتبر هذه الطريقة الأفضل والمطبقة في الواقع لأنها تقوم على أساس منهج علمي متمثل في إتباع الخطوات الأساسية التالية:

1- إيجاد حل أولي (مبدئي) ممكن.

2- اختبار أمثلية الحل.

3- تحسين الحل إلى غاية بلوغ الحل الأمثل.

وتتم كل خطوة من هذه الخطوات وفق عدة عمليات حسابية في جداول تسمى جــــداول السمبلاكس ذات الشكل العام الموالي:

معاملات دالة الهدف (C_j)			
المتغيرات (X_i, e_i, A_i)	b_j	V	C_k
مصفوفة القيود (a_{ij})	كمية الموارد	المتغيرات المجهولة	معاملات دالة الهدف

المقابلة للمتغيرات المجهولة الأساسية	الأساسية (e_i, A_i)		(معاملات معادلات القيود)
قيمة دالة الهدف $= Z$			سطر (صف) التقييم (ΔC)

- *تطبيق طريقة السمبلاكس في حالة التعظيم (Max):*

مثال: نفس المثال السابق بتطبيق الطريقة البيانية بهدف مقارنة النتيجة المترتبة عن الطريقتين.

$$\begin{cases} Max\ Z = 8X + 6Y \\ 4X + 2Y \leq 60 \\ 2X + 4Y \leq 48 \\ X, Y \geq 0 \end{cases}$$

يجب إتباع الخطوات المذكورة سابقا وذلك كما يلي:

1- **إيجاد الحل الأولي (المبدئي):** أي الجدول الأول من جداول السمبلاكس وذلك كما يلي:

تحويل المتراجحات إلى معادلات من خلال إضافة:

- متغير عشوائي (الفوارق) والذي يرمز له بـــ (e_i) ومعناه الاقتصادي أنه عبارة عن طاقة عاطلة أو غير مستغلة، حيث أن عائدها يساوي الصفر (قيمته في دالة الهدف هو الصفر).

ومنه:

$$\begin{cases} 4X + 2Y \leq 60 \\ 2X + 4Y \leq 48 \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} 4X + 2Y + e_1 = 60 \\ 2X + 4Y + e_2 = 48 \end{matrix}$$

- متغير اصطناعي والذي يرمز بـــ (A_i) ومعناه الاقتصادي أنه عبارة عـــن مـــادة ذات تكلفة عالية جداً تقدر بـــ M وقيمتها عكس إتجاه دالة الهدف حتى لا تظهر في الحل النهائي. أي أنها وسيلة مساعدة على الحل فقط. حيث: $Max \longrightarrow -MA_i$ و $Min \longrightarrow +MA_i$

ومنه يصبح النموذج المعدل كما يلي:

$$\begin{cases} MaxZ = 8X + 6Y + 0\,e_1 + 0\,e_2 \\ 4X + 2Y + e_1 = 60 \\ 2X + 4Y + e_2 = 48 \\ X, Y, e_1, e_2 \geq 0 \end{cases}$$

الآن سنضع كل بيانات النموذج المعدل في الجدول الأول للسمبلاكس كما يلي:

			8	6	0	0
C_k	V	b_j	X	Y	e_1	e_2
0	e_1	60	4	2	1	0
0	e_2	48	2	4	0	1

	$Z = 0$	- 8	- 6	0	0

كيفية حساب قيم Z و ΔC كما يلي:

$$Z = \sum C_k b_j$$

$$\Delta C = \sum C_k aij - C_j$$

2- **اختبار أمثلية الحل** كما يلي:

يعتبر **الحل أمثلا في حالة** Max **إذا كان** $\Delta C \geq 0$ أما العكس فهو حل غير أمثل يستوجب التحسين

3- **تحسين الحل:** أي البحث عن الحل الأفضل إلى غاية الوصول إلى الحل الأمثل من خلال إيجاد المتغيرة الداخلة ثم تحديد المتغيرة الخارجة كما يلي:

- تحديد **المتغيرة الداخلة في حالة** Max **هو اختيار أصغر قيمة سالبة** (الأكبر بالقيمة المطلقة) من قيم سطر التقييم (ΔC) السالبة. ونحددها في الجدول بسهم داخل بجانب تلك المتغيرة.

- تحديد **المتغيرة الخارجة في كلتا الحالتين** (Max أو Min) باختيار **أصغر قيمة موجبة وغير معدومة** لنسب عناصر b_j على عناصر عمود المتغيرة الداخلة فقط ($a_{ij\ k}$) حيث K يمثل عمود المتغيرة الداخلة فقط، أي: $Min \frac{b_j}{a_{ij\ K}}$.

- تحديد نقطة المحور، وهي عبارة عن نقطة تقاطع عمود المتغيرة الداخلة مع سطر المتغيرة الخارجة. وبناء على هذه النقطة **يتمحور** تشكيل الجدول الموالي.

- تحديد قيم الجدول الموالي:

أولا نبدأ بسطر المحور حيث كل قيمه تقسم على نقطة المحور؛

ثانيا كل عناصر عمود المحور أصفار؛

وأخيراً بقية عناصر المصفوفة وكذلك b_j تحسب وفق العلاقة التالية:

$$\text{القيمة الجديدة للعنصر} = \text{القيمة القديمة للعنصر} - \frac{\text{الرقم المقابل لها في سطر المحور} \times \text{الرقم المقابل لها في عمود المحور}}{\text{نقطة المحور}}$$

وبالتالي نسجل كل هذه القيم في الجدول الموالي ونحسب قيم Z و ΔC ونعيد اختبار الأمثلية.

والمغزى الاقتصادي لتغير قيم عناصر الجدول هو أنه عندما يتم تغيير نوع معين من المنتوجات أو الموارد في البرنامج بمنتوجات أو موارد أخرى تتطور قيمة دالة الهدف نحو الأفضل.

تابع للجدول السابق:

8	X	15	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0
0	e_2	18	1	3	$-\frac{1}{2}$	1
$Z = 120$			0	-2	2	0

8 6	X Y	12 6	1 0	0 1	$\frac{1}{3}$ $-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$ $\frac{1}{3}$
$Z = 132$			0	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$

نـــلاحظ من الجدول الأخير أن جميع قيم $\Delta C \leq 0$ ومنه الحل أمثل، حيث يجب إنتاج 12 مكتبة و6 طاولات لتحقيق أعظـــم ربـــح يقدر بـــ 132 دج، مع الاستغلال التـــام للطاقـــة الإنتاجية للقيدين

(قيم $e_1 = 0,\ e_2 = 0$ في العمود b_j بالجدول الأخير). إضافة إلى أنه بزيادة استغلال وحدة واحدة في القيد الأول سيؤدي إلى زيادة الربح بـــ $\frac{5}{3}$ من خلال زيادة إنتاج $\frac{1}{3}$ من B وتخفيض إنتاج $\frac{1}{6}$ من T. وكذلك بزيادة استغلال وحدة واحدة في القيد الثاني سيؤدي إلى زيادة الربح بـــ $\frac{2}{3}$ من خلال تخفيض إنتاج $\frac{1}{6}$ من B وزيادة إنتاج $\frac{1}{3}$ من T. وهذه هي خطة الإنتاج المثلى.

ملاحظة: المتغيرات الموجودة في الحل الأمثل (العمود V في الجدول الأخير) قيمتـــها في ســـطر التقييم صفر والعكس صحيح، حيث أن نقطة تقاطع نفس المتغيرة أفقيا وعموديا تســـاوي 1 وبقية عناصر عمود تلك المتغيرة أصفار (0).

- تطبيق طريقة السمبلاكس في حالة التخفيض (Min):

تستخدم طريقة السمبلاكس لتخفيض التكاليف (سعر التكلفة، الوقت، الجهد).

مثال:

$$\begin{cases} Min\ Z = X_1 + 3X_2 \\ X_1 + X_2 \geq 4 & (1) \\ 2X_1 + X_2 \leq 6 & (2) \\ X_2 = 3 & (3) \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

نتبع نفس الخطوات السابقة في مثال Max مع الاختلاف في بعض القواعد.

أولا تحويل المتراجحات إلى معادلات وتعديل النموذج كما يلي:

$$\begin{cases} Min\ Z = X_1 + 3X_2 + 0e_1 + 0e_2 + MA_1 + MA_2. \\ X_1 + X_2 - e_1 + A_1 = 4 & (1) \\ 2X_1 + X_2 + e_2 = 6 & (2) \\ X_2 + A_2 = 3 & (3) \\ X_1, X_2, e_1, e_2, A_1, A_2 \geq 0 \end{cases}$$

شرح المعادلة رقم (1): إن $X_1 + X_2 - e_1 = 4$ صحيحة فقط إذا كـــان $X_1 + X_2 > e_1$ أمـــا العكس فإنها غير مقبولة رياضيا وبالتالي يجب إضافة متغير اصطناعي يساعد على الحل (A_i).

$+ e_i$ = طاقة عاطلة قيمتها صفر في Z.
$- e_i$ = فائض يمثل الفرق بين الكمية الواجب إنتاجها وأدنى كمية يمكن إنتاجها.

شرح المعادلة رقم (3): هي في الواقع معادلة لكن نضيف A_i يساعدنا على الحل فقط لأننا نحتاج متغيراً أساسيا في العمود V في أول جدول.

- إن **الإختلاف في الحل بالسمبلاكس بين Max وMin** هو أنه في Min عند تحديد:
  - ❖ أمثلية الحل: فإن الحل أمثل إذا كانت جميع قيم ΔC سالبة.
  - ❖ اختيار المتغيرة الداخلة هي تلك التي تقابل أكبر قيمة موجبة.

			1	3	0	0	M	M
C_k	V	b_j	X_1	X_2	e_1	e_2	A_1	A_2
M	A_1	4	1	1	-1	0	1	0
0	e_2	6	2	1	0	1	0	0
M	A_2	3	0	1	0	0	0	1
Z = 7M			M-1	2M-3	-M	0	0	0
M	A_1	1	1	0	-1	0	1	-1
0	e_2	3	2	0	0	1	0	-1
3	X_2	3	0	1	0	0	0	1
Z = M+9			M-1	0	-M	0	0	3-2M
1	X_1	1	1	0	-1	0	1	-1
0	e_2	1	0	0	2	1	-2	1
3	X_2	3	0	1	0	0	0	1
Z = 10			0	0	-1	0	1-M	2-M

نلاحظ من الجداول السابقة خروج المتغيرات الاصطناعية من الحل وهذا طبقا للفرضية التي وضعناها (A_i وسيلة مساعدة على الحل ويجب أن تخرج منه). فبقاء A_i في الجدول الأخير يعني أن المسألة ليس لها حل.

من خلال الجدول الأخير نلاحظ أن جميع قيم ΔC أقل أو يساوي الصـــفر أي أن الحـــل أمثل، حيث يجب (بافتراض أن المشكلة هي مشكلة إنتاج) إنتاج 1(وحدة) من المنتوج الذي رمز لكمياته بـــ X_1 و3 وحدات من X_2 مع بقاء طاقة عاطلة في القيد الثاني تقدر بـــ1 وحدة لتحقيق أدنى تكلفة تقدر بـــ 10دج. وبزيادة استغلال وحدة واحدة في القيد الأول سيؤدي إلى تخفـــيض

التكلفة بـــ1 دج من خلال تخفيض إنتاج 1 وحدة من X_1 وزيادة استغلال 2 وحـــدة في القيـــد الثاني.
أما العمودين الأخيرين ليس لهما أي تفسير لأن A_i وسيلة مساعدة على الحل وليس لهـــا مغـــزى اقتصادي.

6- تحليل الحل الأمثل:

إن الحل الأمثل الذي يتم الحصول عليه باستخدام طريقة السمبلاكس يكون شاملا لعـــدة معلومات. هذه الأخيرة يجب أن تفسر اقتصاديا و غالبا ما يتم توسيعها بدراسة البرنامج الثنائي.

إضافة إلى أن الحل الأمثل ناجم عن عدة معطيات أساسية كالمعاملات الفنية، الموارد المتاحـــة، التكاليف أو العوائد. فهذه المعطيات غالبا ما تكون مرتبطة بالتغير و عـــدم التأكـــد لأن محـــيط المؤسسة غير ثابت بل ديناميكي، مما يستوجب دراسة و تحديد المجال الذي يبقى فيه الحل أمثلا عن طريق دراسة تحليل الحساسية.

6-1- الثنائية (Dualité) (البرنامج الثنائي، استنتاج حله وتفسيره الاقتصادي):

6-1-1- البرنامج الثنائي (النظير أو المعاكس):

كل برنامج أصلي (أولي) في البرمجة الخطية له برنامجا ثنائيا، و هو عبارة عـــن برنـــامج معاكس للبرنامج الأصلي. و يمكن تلخيص خطوات صياغة البرنامج الثنائي كمايلي:

- تحويل دالة الهدف من Max إلى Min و العكس صحيح.
- معاملات دالة الهدف تصبح الطرف الثاني (الموارد) من القيود و العكس صحيح.
- أسطر المصفوفة تصبح أعمدة و العكس صحيحا.
- نوع المتراجحة إذا كان $\leq$ يصبح $\geq$ و العكس صحيح.
- تغيير رمز المتغيرات مثلا Xi تصبح Yi.

وبالتالي، إذا كان لدينا النموذج وفقا لصيغته القانونية كمايلي:

إذا كان هذا البرنامج الأصلي (الأولي) يصبح برنامجه الثنائي

أما إذا كان هذا البرنامج الأصلي يصبح برنامجه الثنائي

$$\begin{cases} Max\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum a_{ij} x_j \leq b_i \\ \sum a_{ij} x_j = b_i \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} Min\ Z = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ \sum a_{ji} y_i \geq c_j \\ \sum a_{ji} y_i = c_j \end{cases}$$

$y_i \geq 0$ $\qquad\qquad$ $x_j \geq 0$

مثال:

$$\begin{cases} Max\ Z = 10x+20y \\ x+2y \leq 2 \\ 5x+y \leq 3 \\ 6x+7y \leq 4 \quad x,y \geq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} Min\ Z = 2A+3B+4C \\ A+5B+6C \geq 10 \\ 2A+B+7C \geq 20 \\ A,B,C \geq 0 \end{cases}$$

ملاحظة:

إذا كان النموذج ذا صيغة مختلطة (عامة) أي يحتوي على متراجحات من النوعين (≤،≥)، فإنه يجب تحويله إلى الصيغة القانونية ثم تحويله إلى برنامج ثنائي.

مثال:

$$\begin{cases} Max\ Z = x+2y \\ 3x+4y \leq 20 \\ 5x+6y \geq 30 \\ x+y \leq 10 \\ x,y \geq 0 \end{cases}$$

نموذج البرنامج ذو صيغة عامة يتم تحويله إلى صيغة قانونية أي في حالة Max يجب أن تكون كل قيوده من النوع أقل أو يساوي و منه نضرب طرفي المتراجحة أكبر أو يساوي في إشارة الناقص(**-**) يصبح القيد أقل أو يساوي كما يلي: $-(5x+6y) \geq -30$

$$\Rightarrow -5x-6y \leq -30$$

و منه يصبح النموذج الأصلي:

$$\begin{cases} Max\ z = x+2y \\ 3x+4y \leq 20 \\ -5x-6y \leq -30 \\ x+y \leq 10 \\ x,y \geq 0 \end{cases}$$

ومنه يكون النموذج الثنائي:

$$\begin{cases} Min\ Z = 20A-30B+10C \\ 3A-5B+1C \geq 1 \\ 4A-6B+1C \geq 2 \\ A,B,C \geq 0 \end{cases}$$

ملاحظة: إن عدد المتغيرات في النموذج الأصلي يساوي عدد القيود في النموذج الثنائي و عدد القيود في النموذج الأصلي يساوي عدد المتغيرات في النموذج الثنائي.

6-2-1- كيفية استنتاج الحل الأمثل للبرنامج الثنائي من خلال الحل الأمثل للبرنامج الأصلي:

يتم استنتاج الحل الأمثل للبرنامج الثنائي من خلال الحل الأمثل للبرنامج الأصلي بإتباع الخطوات التالية:

- أولا قيم ΔC تصبح في مكان b_j والعكس صحيح.
- ثانيا تحديد نوع المتغيرات وفقا للقاعدة:
- ثالثا قيمة Z نفسها.

- رابعا أسطر المصفوفة تصبح أعمدة والعكس صحيح مع العكس في الإشارة (+ يصبح - و- يصبح +).

- ثم تكملة بقية بيانات الجدول (C_k،...).

ملاحظة: فقط إذا كان النموذج الثنائي من النوع *Min* نضيف لسطر التقييم إشارة (-).

مثال: البرنامج الأصلي

$$\begin{cases} Max\ Z=X_1+3X_2 \\ 2X_1+X_2\leq 40 \\ X_1+4X_2\leq 90 \\ X_1,\ X_2\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Max\ Z=X_1+3X_2+0e_1+0e_2 \\ 2X_1+X_2+e_1=40 \\ X_1+4X_1+e_2=90 \\ X_1,\ X_2,\ e_1,\ e_2\geq 0 \end{cases}$$

البرنامج الثنائي له

$$\begin{cases} Min\ Z=40Y_1+90Y_2 \\ 2Y_1+Y_2\geq 1 \\ Y_1+4Y_2\geq 3 \\ Y_1,\ Y2\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Min\ Z=40Y_1+90Y2+0e_1+0e_2+MA_1+MA_2 \\ 2Y_1+Y_2-e_1+A_1=1 \\ Y_1+4Y_2-e_2+A_2=3 \\ Y_1,\ Y_2,\ e_1,\ e_2,\ A_1,\ A_2\geq 0 \end{cases}$$ مــن

سنستنج الحل الأمثل(الجدول الأخير) للبرنامج الثنائي كمايلي:

			1	3	0	0
C_k	V	b_j	$_1$	x_2	e_1	e_2
0	e_1	40	2	1	1	0
0	e_2	90	1	4	0	1
	$Z=0$		-1	-3	0	0
0	e_1	$\frac{35}{2}$	$\frac{7}{4}$	0	1	$-\frac{1}{4}$
3	x_2	$\frac{45}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$

$135/2$	$Z=$		$-1/4$	0	0	$3/4$
1	x_1	10	1	0	$4/7$	$-1/7$
3	x_2	20	0	1	$-1/7$	$2/7$
$Z=70$			0	0	$1/7$	$5/7$

			y_1	y_2	e_1	e_2	A_1 A_2
40	y_1	$1/7$	1	0	$-4/7$	$+1/7$	
90	y_2	$5/7$	0	1	$+1/7$	$-2/7$	
$Z=70$			0	0	-10	-20	

6-1-3- التفسير الاقتصادي للبرنامج الثنائي:

البرنامج الأصلي

$$\begin{cases} Max\ Z = 2X_1+3X_2+4X_3 \\ 5X_1+6X_2+7X_3 \leq 20 \quad (1) \\ 8X_1+9X_2+10X_3 \leq 30 \quad (2) \\ 11X_1+12X_2+13X_3 \leq 40 \quad (3) \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

البرنامج الثنائي

$$\begin{cases} Min\ Z= 20Y_1+30Y_2+40Y_3 \\ 5Y_1+8Y_2+11Y_3 \geq 2 \\ 6Y1+9Y_2+12Y_3 \geq 3 \\ 7Y_1+10Y_2+13Y_3 \geq 4 \\ Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0 \end{cases}$$

يوضح النموذج الأصلي أن المؤسسة "س"صناعية تنتج ثلاثة أنواع من المنتوجات رمز لكمياها بـ: $X1$, $X2$, $X3$ على التوالي. وهدفها هو تعظيم العوائد ($Max\ Z$).

إذن المشكلة هي البحث عن عدد الوحدات المنتجة من الأنواع الثلاث ($X1$, $X2$, $X3$) لتعظيم العائد من خلال استغلال الطاقات الإنتاجية للورشات الثلاث (1)،(2)،(3).

وبالتالي:

- دالة الهدف توضح العوائد الوحدية من X_1,X_2 وX_3 ؛

- القيود تبين الوقت المتاح لإنتاج كل وحدة من X_1, X_2, X_3 حيث أن أكبر وقت متاح للورشات الثلاث هو: 20، 30، 40 على التوالي.

- شرط عدم السلبية: أي كمية المنتوجات موجبة أو معدومة.

نلاحظ في النموذج الثنائي نفس أرقام النموذج الأصلي لكن التفسير بشكل معاكس كما يلي:

إن نفس المؤسسة "س" تقوم بتأجير طاقاتها الإنتاجية لمؤسسة "ع"، أي هدف المؤسسة "ع" تخفيض تكلفة الاستئجار ($Minc$).

ومنه:

- دالة الهدف تمثل تخفيض تكلفة الاستئجار($Min\ C$).

حيث أن قيم Y_i هي تكلفة استئجار الورشات الثلاث (دج).

- القيود توضح أن قيمة استئجار الورشات الثلاث لصنع وحدة من $X3,X2,X_1$ أكبر أو يساوي من العائد الوحدي المتحصل عليه من X_1, X_2, X_3.

- شرط عدم السلبية: أي قيمة التأجير أكبر أو يساوي الصفر.

6-2- تحليل الحساسية:

تتم دراسة حساسية (تأثر) الحل الأمثل لتغيرات محيط المؤسسة (تغير في: الأرباح، أسعار البيع، التكاليف، الطاقات الإنتاجية، ...) في ثلاث حالات هي:

- حالة تغيير معاملات دالة الهدف (C_j).
- حالة تغيير الطرف الثاني (الأيمن) من القيود (b_j).
- حالة تغيير المعاملات الفنية (a_{ij}).

إن تحليل الحساسية لا يتطلب حل المشكلة من البداية بل من خلال دراسة الجدول الأخير (الحل الأمثل) فقط.

- بالنسبة لحالة تغيير معاملات دالة الهدف، فإنه يمكن تحديد المجال لقيم هذه المعاملات بحيث يبقى الحل الأمثل ثابتا وفق شرط الأمثلية (قيم ΔC **أكبر أو يساوي الصفر في** Max وقيم ΔC **أقل أو يساوي الصفر في** Min).
- بالنسبة لحالة تغيير الطرف الثاني من القيود (الطاقات المتاحة)، فتغيراته تتمثل في المجالات التي يتغير فيها دون تغيير قيمة التأثير الحدي في الحل الأمثل. و يتم استخلاص مجال تغيير الموارد **وفق المتراجحة أكبر أو يساوي فقط.**
- بالنسبة لتغيير المعاملات الفنية، فإن مجال تغييرها بحيث يبقى الحل أمثلا حسب وجود المتغيرات في الحل يحدد وفق هذه الحالات:

  ➢ حالة وجود المتغيرات في الحل: يكون مجال التغير لـــ a_{ij} هو صفر أي: $\Delta a_{ij}=0$.

  ➢ حالة عدم وجود المتغيرات في الحل:

- إذا كانت المتغيرات خارجة عن الحل والموارد مستعملة كلية فإن المجال هو: $\frac{-X_j^*}{e_j^*} \leq \Delta a_{ij} \leq +\infty$

- إذاكانت المتغيرات خارجة عن الحل الموارد غير مستعملة كلية فإن المجال هو: $-\infty \leq \Delta a_{hj} \leq \frac{e_j^+}{X_j^+}$

حيث أن: الرمز (*) يمثل قيم سطر التقييم المقابلة لعمودي (X_j) و (e_j).

الرمز (+) يمثل قيم العمود (b_j) في الجدول الأخير للسمبلاكس.

مثال:

$$\begin{cases} Max\ Z = 2A+4B+3C \\ 3A+4B+2C \leq 60 \\ 2A+B+2C \leq 40 \\ A+3B+2C \leq 80 \\ A, B, C \geq 0 \end{cases}$$

والحل الأمثل (الجدول الأخير) لهذا النموذج هو:

			2	4	3	0	0	0
C_k	V	b_j	A	B	C	e_1	e_2	e_3
4	B	$20/3$	$1/3$	1	0	$1/3$	$-1/3$	0
3	C	$50/3$	$5/6$	0	1	$-1/6$	$2/3$	0
0	e_3	$80/3$	$5/3$	0	0	$+2/3$	$-1/3$	1
$Z=230/3$			$11/6$	0	0	$5/6$	$2/3$	0

1- حالة تغيير معاملات دالة الهدف:

لمعرفة مقدار التغير (الزيادة أو التخفيض) التي يمكن أن تحدث في الربح الوحــدوي لـــ A، B، C بحيث يبقى الحل الأمثل ثابتا، يجب أن نوضح الحالتين و هما : حالة وجود المتغيرات في الحل الأمثل (B،C) وحالة عدم وجود المتغيرات في الحل الأمثل(A).

1-1- حالة تغيير معاملات المتغيرات التي لم تظهر في الحل الأمثل:

نلاحظ من الجدول السابق أن A غير موجود في الحل الأمثل أي أن قيمة $A=0$. و بالتالي لتغيير معامل A(الربح الوحدوي لــ A) أي بدلا من 2 يصبح أكبر، فإنه لإدخال A إلى الحــل الأمثل (أي لصنع وحدات من A) يجب أن يكون أدنى ربح لــ Aهو: الــربح الســابق (2) + التأثير الحدي المقابل لــ A $\left(\frac{11}{6}\right)$ أي : $2+\frac{11}{6}=\frac{23}{6}$ دج.

و بالتالي لو نعيد الحل للنموذج السابق بحيث الربح الوحدوي لــ Aهــو $\frac{23}{6}$ أو أكثــر سنجد Aفي الحل الأمثل.

1-2- حالة تغير معاملات المتغيرات التي ظهرت في الحل الأمثل:

لمعرفة مقدار التغير في الربح الوحدوي لــ Bو C (لأنهما موجودتان في الحل الأمثل)، نتبع مايلي:

- أولا نسجل سطر المصفوفة المقابل لتلك المتغيرة من الجدول الأخير أفقيا؛

- ثانيا نسجل سطر التقييم ΔC؛
- ثالثا نستنتج المتراجحات؛
- رابعا نرسم محورا يشمل كل قيم (Δ)؛
- خامسا نستنتج مجال التغير؛
- وأخيرا نحدد مجال تغير الربح الوحدوي لتلك المتغيرة دون التأثير على الحل الأمثل.

❖ بالنسبة للمتغيرة B:

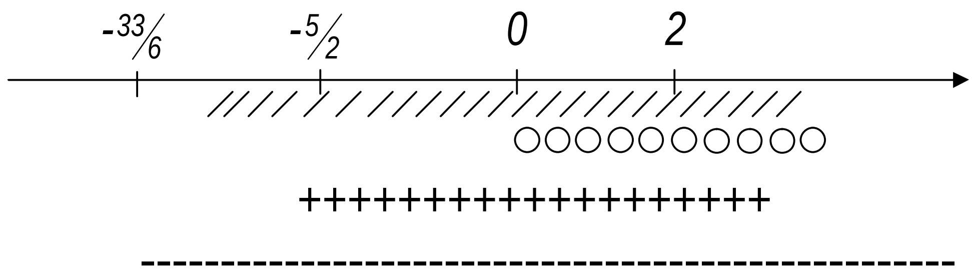
$$\begin{array}{lcccccc} (\Delta)B \rightarrow & \frac{1}{3} & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ Z \rightarrow & \frac{11}{6} & 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{2}{3} & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{1}{3}\Delta + \frac{11}{6} \geq 0 \Rightarrow \Delta \geq -\frac{11}{6}.\frac{3}{1} \Rightarrow \boxed{\Delta \geq -\frac{33}{6}}$$

$$1\,\Delta + 0 \geq 0 \Rightarrow \boxed{\Delta \geq 0}$$

$$\frac{1}{3}\Delta + \frac{5}{6} \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{3}\Delta \geq -\frac{5}{6} \Rightarrow \Delta \geq -\frac{5}{6}.\frac{3}{1} \Rightarrow \boxed{\Delta \geq -\frac{5}{2}}$$

$$-\frac{1}{3}\Delta + \frac{2}{3} \geq 0 \Rightarrow -\frac{1}{3}\Delta \geq -\frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{\Delta \leq 2}$$



$$\Delta \in [0, 2]$$

و منه معامل B يتغير ضمن المجال $[0+4,2+4]$ ، أي أن تغير الربح الوحدوي لـــ B من 4دج إلى 6دج يسمح ببقاء الحل الأمثل ثابتا.

❖ بالنسبة للمتغيرة C:

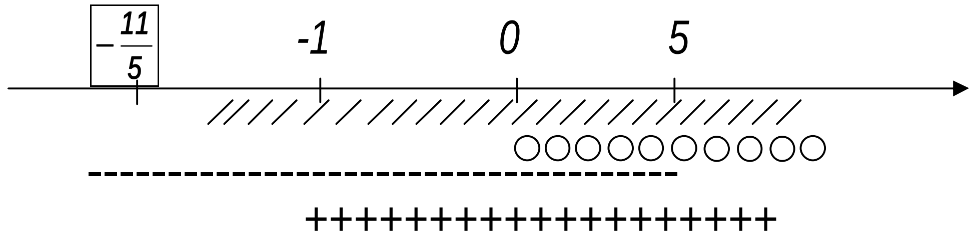
$$\begin{array}{lcccccc} (\Delta)C \rightarrow & \frac{5}{6} & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 0 \\ Z \rightarrow & \frac{11}{6} & 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{2}{3} & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{5}{6}\Delta + \frac{11}{6} \geq 0 \Rightarrow \boxed{\Delta \geq -\frac{11}{5}}$$

$$1\,\Delta + 0 \geq 0 \Rightarrow \boxed{\Delta \geq 0.}$$

$$-\frac{1}{6}\Delta + \frac{5}{6} \geq 0 \Rightarrow \boxed{\Delta \leq 5.}$$

$$\frac{2}{3}\Delta + \frac{2}{3} \geq 0 \Rightarrow \boxed{\Delta \geq -1.}$$



$$\Delta \in [0, 5]$$

و منه يمكن تغيير معامل *C* ضمن المجال *[0+3,5+3]* . أي أن تغير الربح الوحدوي لـــــ *C* من *3* إلى *8* دج يسمح ببقاء الحل الأمثل ثابتا.

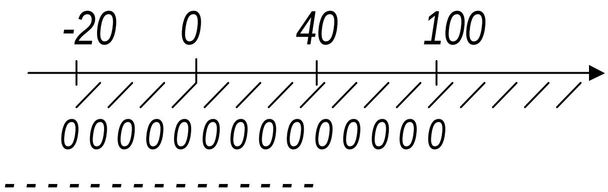
2- حالة تغيير الطرف الثاني (الأيمن) من القيود:

لمعرفة التغير في الطاقات الإنتاجية (b_j) دون التأثير على متغيرات الحل أو التأثيرات الحديـــة، نتبع ما يلي:

- أولا نسجل قيم b_j من الجدول الأخير عموديا؛
- ثانيا نسجل قيم e_i (القيد المطلوب) عموديا؛
- ثالثا نستنتج المتراجحات؛
- رابعا نرسم محورا يضم كل قيم Δ؛
- وأخيرا نحدد مجال التغير.

❖ **بالنسبة للقيد الأول (e_1):**

$$\begin{array}{llll}
\underline{b_j} & \underline{\Delta e_1} & & \\
\frac{20}{3} & \frac{1}{3} & \rightarrow & \frac{20}{3} + \frac{1}{3}\Delta \geq 0 \Rightarrow \boxed{\Delta \geq -20} \\
\frac{50}{3} & -\frac{1}{6} & \rightarrow & \frac{50}{3} - \frac{1}{6}\Delta \geq 0 \Rightarrow \boxed{\Delta \leq 100} \\
\frac{80}{3} & -\frac{2}{3} & \rightarrow & \frac{80}{3} - \frac{2}{3}\Delta \geq 0 \Rightarrow \boxed{\Delta \leq 40}
\end{array}$$

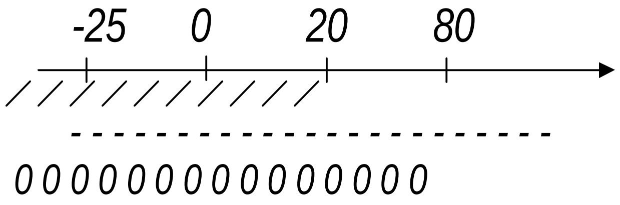


$$\Delta \in [-20, 40]$$

ومنه الطاقة الإنتاجية للقيد الأول تتغير ضمن *[-20+60,40+60]* أي ضمن *[40,100]* يبقى الحل أمثلا.

❖ **بالنسبة للقيد الثاني (e_2):**

$$\begin{array}{llll} \underline{b_j} & \underline{\Delta e_2} & & \\ \frac{20}{3} & -\frac{1}{3} & \rightarrow & \frac{20}{3} - \frac{1}{3}\Delta \geq 0 \Rightarrow \boxed{\Delta \leq 20} \\ \frac{50}{3} & \frac{2}{3} & \rightarrow & \frac{50}{3} + \frac{2}{3}\Delta \geq 0 \Rightarrow \boxed{\Delta \geq -25} \\ \frac{80}{3} & -\frac{1}{3} & \rightarrow & \frac{80}{3} - \frac{1}{3}\Delta \geq 0 \Rightarrow \boxed{\Delta \leq 80} \end{array}$$



$$\Delta \in [-25, 20]$$

إذن الطاقة الإنتاجية للقيد الثاني تتغير ضمن *[-25+40,20+40]* أي ضمن *[15,60]* يبقى الحل أمثلا.

❖ **بالنسبة للقيد (e_3):** نلاحظ عدم استغلاله كلية حيث بقي $\frac{80}{3}$ منه غير مستغلة (فائض). وبالتالي لا ندرس التغير فيه إلا بعد الاستغلال التام له. أي يمكن تخفيض الطاقة الإنتاجية للقيد الثالث ب $\frac{80}{3}$ أي يصبح $80 - \frac{80}{3} = \frac{160}{3}$ وحدة.

7- الحالات الخاصة لطريقة السمبلاكس:

1- حالة عدم وجود الحل الأمثل:

هي الحالة التي يتم فيها الوصول إلى الحل النهائي (الجدول الأخير للسمبلاكس) للمشكلة المدروسة و لكن هذا الحل يحتوي على المتغير الاصطناعي (بقاء A_i في العمود V في الجدول الأخير)، و بالتالي نقول أن المسألة ليس لها حل أمثل.

2- حالة الحل اللانهائي (عدد لا نهائي من الحلول):

في هذه الحالة فإنه عند حساب قيمة المتغيرة الخارجة $\left(\frac{b_j}{a_{ij}}\right)$ نجد فقط قيم سالبة أو ما لانهاية (∞) وبالتالي لو نختار سنختار ∞ أي عدد لا نهائي من الحلول للمسألة مما يستوجب تعديل النموذج الأصلي.

3- حالة الانحلالية (عدم الانتظام):

في هذه الحالة عند حساب قيم المتغيرة الداخلة أو المتغيرة الخارجة نجد قيمتين أو أكثر متساويتين لها وبالتالي سنختار عشوائيا إحداهما ثم نكمل الحل ونجد نفس الحل الأمثل. والاختلاف في هذا الاختيار هو أن إحدى هذه المتغيرات ستعطي الحل الأمثل بسرعة عكس الأخرى.

4- حالة الحل البديل:

في هذه الحالة نجد أن المتغيرات قيمتها في ΔC تساوي الصفر و هي غير موجودة في الحل الأمثل. وللحصول على حل آخر بديل للحل الأمثل ننطلق من الجدول الأخير و نعيد كتابته وبحيث نعتبر تلك المتغيرة كمتغيرة داخلة ثم نكمل الحل ونجد حلا آخر يختلف في كل القيم ما عدا قيمة Z هي نفسها.

ملاحظة: إن عدد الحلول البديلة بعدد الأصفار الموجودة في سطر التقييم للمتغيرات التي لم تدخل الحل الأمثل.

8- تطبيقات ميدانية (عملية) لطريقة السمبلاكس:

يتم تطبيق طريقة السمبلاكس فقط في مؤسسة صناعية تصنع أكثر من منتوج $(1<X)$ خاصة لبرمجة الإنتاج و في عدة مجالات أهمها:

- تخطيط الإنتاج، أي البحث عن خطة للإنتاج تشمل كميات المنتوجات والطاقة المستغلة وقيمة العائد أو التكلفة مع توضيح تأثير تغيرات المحيط على هذه النتائج وفق تحليل الحساسية.
- الاستغلال الأمثل للموارد، أي توضح الكميات المستهلكة من الموارد (يد عاملة، آلات، مواد وأموال) لاستغلال الفائض في مجالات أخرى أو عدم توريده بتاتا أو توفير العجز لكي لاتتوقف عملية الإنتاج في مراحلها.
- مشكلة المزيج الإنتاجي، أي تحديد الكميات (النسب) المستهلكة من الموارد وكذا الكميات المنتجة من الكميات مثلا: مجال الأدوية.

9- تقييم البرمجة الخطية:

يتم تقييم البرمجة الخطية في مزايا (إيجابيات) و عيوب (سلبيات) و هي:

* مزايا البرمجة الخطية و أهمها:

- تساعد على تحليل المشاكل الكبيرة الحجم (عدد كبير من المتغيرات و القيود).

- الاستغلال الأمثل للموارد النادرة و المتاحة.

- اتخاذ القرار الأمثل للمشكلة المدروسة.

- إمكانية تعديل الحل الأمثل بواسطة تحليل الحساسية.

* عيوب البرمجة الخطية و أهمها:

- عدم إدخال عنصر عدم التأكد في الدراسة أي لا تستخدم الاحتمالات خاصة أن محيط المؤسسة متغير.

- لا تعطي أهمية للعوامل غير القابلة للقياس مثلا جودة المنتوج.

- لا تعطي أهمية للظاهرة غير القابلة للانقسام مثلا صنع منتوج تام كالسيارة. لذلك نلجأ لتطبيق البرمجة بالأعداد الكاملة.

- تهمل دراسة العلاقات غير الخطية بين المتغيرات لذلك نطبق البرمجة غير الخطية.

- تهمل دراسة المسائل ذات عدة أهداف لذلك نطبق البرمجة متعددة الأهداف.

الفصل الثاني

طريقة النقــل (*Transport*)

الفصل الثاني: طريقــة النقــل

1- تعريف طريقة النقل:

تمثل طريقة النقل إحدى حالات البرمجة الخطية لأنه لها نفس خصائص البرمجة الخطيـــة، إلا أنه لها ظروفها وشروطها الخاصة وطرق الحل الخاصة بها مما يجعلها كطريقة مستقلة في حد ذاتها.

فالبرمجة الخطية تستعمل للتوزيع الأمثل للموارد بالمؤسسة، أما طريقة النقل لها نفس هـــذه الخواص مضافاً إليها **شرط تساوي العرض مع الطلب.**

وبالتالي، فإن طريقة النقل عبارة عن طريقة لتوزيع أو نقل منتوجات أو خدمات من عـــدة مصادر أو منتجين (مصانع، مخازن، ...) تمثل الكميات المعروضة إلى عدة مراكـــز اســـتقبال أو مستهلكين (زبائن، مخازن، ...) تمثل الكميات المطلوبة بأقل تكاليف نقل ممكنة.

2- شروط استخدام طريقة النقل:

قبل تطبيق طريقة النقل لحل المشكلة، يجب التأكد من توفر الشروط التالية:

- وجود مجموعة من الطاقات يمكن استخدامها، والتي تسمى بالمصادر؛
- أن تكون عدة أوجه لاستغلال هذه الطاقات، وإلا لما كانت هناك مشكلة في توزيع الموارد؛
- يجب أن يتساوى مجموع المعروض من الطاقات (العرض) مع مجموع المطلوب منها (الطلب)؛
- أن تكون قيمة سواء كانت تكلفة أو إيراد أو وقت لكل من الطاقات المعروضة بالنسبة لطلـــب ما؛
- وجود هدف سواء أعلى إيراد (*Max*) أو أدنى تكاليف (*Min*)؛
- تجانس الموارد (نفس وحدة القياس: طن، لتر، ...).

3- النموذج الرياضي لطريقة النقل:

بافتراض وجود عدد من المصادر الإنتاجية (*n*) وعدد من المراكز المستقبلة تقدر بـــ(*m*)، فإن النموذج الرياضي لطريقة النقل يتكون من ما يلي:

1- دالة الهدف: والتي قد تكون من نوع التعظيم (*Max*) أو التخفيض (*Min*)، والتي تكتب وفق الصيغة الرياضية التالية:

$$Optf(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} C_{ij} X_{ij}$$

2- القيود: والتي تتمثل في:

- تساوي العرض مع الطلب، أي: $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$
- تساوي الكميات المعروضة من المراكز مع طاقاتها الإنتاجية، أي: $\sum_{j=1}^{m} X_{ij} = a_i$
- تساوي الكميات المطلوبة مع ما يحصل عليه كل مستهلك، أي: $\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = b_j$

3- شرط عدم السلبية، أي عدم نقل كميات سلبية، ومنه: $X_{ij} \geq 0$.

حيث: C_{ij}: التكلفة الوحدوية أو الإيراد الوحدوي لنقل أو توزيع المنتوجات.

X_{ij}: الكميات المعروضة أو الموزعة من المصدر (*i*) إلى المستهلك (*j*).

a_i: الكميات المعروضة (المنتجة) في المصدر رقم (*i*)، أي العرض.

b_j: الكميات المطلوبة من طرف المستهلك (*j*)، أي الطلب.

4- طرق حل مسائل النقل:

إن نموذج النقل يحتوي على $(m+n)$ معادلة و $(n \times m)$ متغيرا أو مجهــولاً. وبــافتراض وجود مصدرين إنتاجيين وثلاثة مراكز استقبال، فإن نموذج النقل تتم دراسة معطياته في جــداول النقل ذات الشكل الموالي:

المراكز (B_i) المصادر (A_i)	B_1		B_2		B_3		مجموع الكميات المعروضة (العرض $\sum$)
A_1	X_{11}	C_{11}	X_{12}	C_{12}	X_{13}	C_{13}	$\sum_{j=1}^{3} X_{1j}$
A_2	X_{21}	C_{21}	X_{22}	C_{22}	X_{23}	C_{23}	$\sum_{j=1}^{3} X_{2j}$
مجموعة الكميات المطلوبة (الطلب$\sum$)	$\sum_{i=1}^{2} X_{i1}$		$\sum_{i=1}^{2} X_{i2}$		$\sum_{i=1}^{2} X_{i3}$		$\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} X_{ij}$

بعد وضع البيانات (الكميات المعروضة والمطلوبة والتكاليف أو الإيرادات الوحدويــة) في الجدول حيث العرض يمثل أفقيا (بالأسطر) والطلب عموديا (بالأعمدة)، يمكن استخدام إحــدى طرق الحل، وذلك بإتباع مرحلتين أساسيتين هما:

1- إيجاد الحل الأولي (المبدئي) وفق توزيع الكميات بتطبيق قاعدة التوزيع التالية:

$$X_{ij} = Min\ (a_i, b_j)$$

2- مراقبة أمثلية الحل وتحسينه خلال إتباع خطوات متتالية إلى غاية إيجاد الحل الأمثل.

وسنوضح طرق الحل وفق هذا المثال:

مثال:

تملك مؤسسة ما ثلاثة مصانع (X_1, X_2, X_3) لإنتاج المكاتب. ويتم شحن هذه المنتوجات من المصانع إلى ثلاثة مخازن (Y_1, Y_2, Y_3).

ويتم نقل المكاتب من المصانع إلى المخازن وفق التكاليف الوحدوية التالية:

- من المصنع X_1 إلى المخازن (Y_1, Y_2, Y_3) بــتكاليف (8، 8، 4) دج على التوالي؛
- من المصنع X_2 إلى المخازن (Y_1, Y_2, Y_3) بــتكاليف (16، 24، 16) دج على التوالي؛
- من المصنع X_3 إلى المخازن (Y_1, Y_2, Y_3) بــتكاليف (24، 16، 8) دج على التوالي.

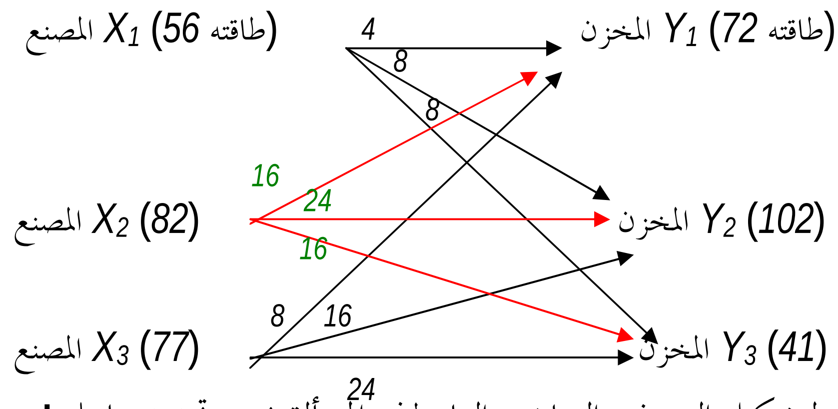
وتقدر الطاقة الإنتاجية للمصانع (X_1, X_2, X_3) بـــ (77، 82، 56) مكتب في الشــهر وعلــى التوالي.

والطاقة الإنتاجية للمخازن (Y_1, Y_2, Y_3) بـــ $(41, 102, 72)$ مكتب في الشهر وعلى التوالي.

المطلوب: تحديد الخطة الواجب إتباعها في نقل المكاتب من المصانع إلى المخازن لتحقيـــق أدنى تكلفة نقل ممكنة (إيجاد الحل الأمثل)؟

الحل: قبل حل هذه المسألة، يمكن توضيحها بيانيا كما يلي:

مراكز الإستقبال (الطالبين) **المصادر (المنتجين أو العارضين)**



ولتشكيل النموذج الرياضي العام لهذه المسألة يجب تحديد ما يلي:

C_{ij} = تكلفة نقل المكتب الواحد من المصنع (i) إلى المخزن (j).

X_{ij} = عدد المكاتب المنقولة أو المعروضة من (i) إلى المخزن (j).

Z = مجموع تكاليف النقل.

a_i = عدد المكاتب المنتجة في المصنع (i).

b_j = عدد المكاتب المطلوبة في المخزن (j).

n = عدد المصانع وعددها 3.

m = عدد المخازن وعددها 3.

$$\begin{cases} MinZ = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} C_{ij}X_{ij} \\ \sum_{j=1}^{3} X_{ij} = a_i , i = 1,2,3 \\ \sum_{i=1}^{3} X_{ij} = b_j , j = 1,2,3 \\ \sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j \\ X_{ij} \geq 0. \end{cases}$$

ملاحظة: قبل التوزيع يجب دائما التأكد من أن العرض = الطلب.

وبتطبيق قاعدة التوزيع المذكورة سابقا $X_{ij} = Min(a_i ، b_j)$ سيتم التوزيع لإيجاد الحـــل الأولي (المبدئي) بتطبيق إحدى هذه الطرق وهي:

1- طريقة زاوية الشمال الغربي:

من خلال إسم هذه الطريقة، فإن التوزيع يبدأ من الخانة التي تقع في أقصى الشمال الغربي (أول خانة يساراً) حيث نطبق القاعدة $X_{ij} = Min(a_i ، b_j)$ وكلما نوزع كمية نطرح البـــاقي أفقيا ثم ننتقل إلى بقية الخانات وهكذا إلى غاية توزيع كل الكميات.

المخازن Y_i / المصانع X_i	Y_1		Y_2		Y_3		العرض $\sum$
X_1	56	4	×	8	×	8	56 0
X_2	16	16	66	24	×	16	82 66 0
X_3	×	8	36	16	41	24	77 41 0
الطلب $\sum$	72 16 0		102 36 0		41 0		215

يمثل هذا الجدول الحل الأولي (المبدئي) فقط، أي مازال رقابة أمثلية الحل (سنوضحها فيما بعد لكل الطرق).

وبحساب قيمة Z لهذا الحل نجد:

$$Z = 56\,(4) + 16\,(16) + 66\,(24) + 36\,(16) + 41\,(24) = \boxed{3624 \text{ دج}}$$

ملاحظة: إن الحل بطريقة زاوية الشمال الغربي يأخذ شكل سلم أي:

➢ **تقييم طريقة زاوية الشمال الغربي:**

- أهم مزاياها: - سهلة التطبيق.
- أهم عيوبها: - تهمل عنصر التكاليف عند التوزيع.
  - تتطلب جداول كثيرة للوصول إلى الحل الأمثل.

2- طريقة أدنى عنصر (تكلفة) في السطر:

كذلك من خلال اسم هذه الطريقة، فإن التوزيع يبدأ بـأدنى تكلفة في السطر الأول (المصدر الأول) وعند توزيع كل كميات السطر الأول ننتقل إلى السطر الثاني ثم الثالث وهكذا دائما بتطبيق قاعدة التوزيع. وبالتالي نحصل على الجدول الموالي.

<u>ملاحظة:</u> - عند تساوي التكاليف نوزع في الخانة ذات أكبر كمية (توزيع).
- عند تساوي الكميات نوزع في أية خانة عشوائيا.

X_i \ Y_i	Y_1		Y_2		Y_3		$\sum$
X_1	56	4	×	8	×	8	56 0
X_2	16	16	25	24	41	16	82 41 25 0
X_3	×	8	77	16	×	24	77 0
$\sum$	72 16		102 77 0		41 0		215

نلاحظ أن هذا التوزيع يختلف عن التوزيع السابق باستخدام طريقة زاوية الشمال الغربي. نحسب قيمة

$$Z: Z = 56\,(4) + 16\,(16) + 25\,(24) + 41\,(16) + 77\,(16) = \boxed{2968 \text{ دج}}$$

نلاحظ أن تكلفة التوزيع وفق الطريقة الثانية أقل من الأولى.

تقييم طريقة أدنى عنصر في السطر:

- أهم مزاياها: تأخذ بعين الاعتبار عنصر التكاليف.
- أهم عيوبها: تهمل التكاليف في الجدول ككل.

3- طريقة أدنى عنصر (تكلفة) في العمود:

تقوم هذه الطريقة بالتوزيع على أساس أدنى تكلفة في العمود الأول (المستهلك أو المستفيد) ثم العمود الثاني وهكذا حتى يتم توزيع كل الكميات.

X_i \ Y_i	Y_1		Y_2		Y_3		$\sum$
X_1	56	4	×	8	×	8	56 0

X_2	×	16	41	24	41	16	82 41 0
X_3	16	8	61	16	×	24	77 61 0
$\sum$	72 16 0		102 41 0		41 0		215

نحسب قيمة Z $Z = 56\,(4) + 41\,(24) + 41\,(16) + 16\,(8) + 61\,(16) = \boxed{2968}$

نلاحظ أن هذا التوزيع يختلف عن التوزيع السابق وقيمة Z نفسها كالطريقة الثانية نظـــرًا لوجود بعض التكاليف المتساوية.

تقييم طريقة أدنى عنصر في العمود:

- أهم مزاياها: تأخذ بعين الاعتبار عنصر التكاليف.
- أهم عيوبها: تهمل التكاليف في الجدول ككل.

4- طريقة أدنى عنصر في الجدول:

تعتمد هذه الطريقة في التوزيع على التكاليف في الجدول ككل وذلك كما يلي:

X_i \ Y_i	Y_1		Y_2		Y_3		$\sum$
X_1	56	4	×	8	×	8	56 0
X_2	×	16	41	24	41	16	82 41 0
X_3	16	8	61	16	×	24	77 61
$\sum$	72 16 0		102 41 0		41 0		215

نحسب قيمة Z $Z = 56\,(4) + 41\,(24) + 41\,(16) + 16\,(8) + 61\,(16) = \boxed{2968}$

نلاحظ أن هذا التوزيع مثل التوزيع السابق وأن قيمة Z نفسها نظـــرا لتســـاوي بعـــض التكاليف لكنه في الواقع هي **أفضل الطرق** لأنها تأخذ بعين الاعتبار التكـــاليف في الجـــدول ككل.

➢ **تقييم طريقة أدنى عنصر في الجدول:** تعتبر من أفضل الطرق في التطبيـــق لأنهـــا تـــدرس التكاليف في الأسطر والأعمدة معًا.

وكذلك ظهرت طريقة أخرى أفضل وهي الطريقة الموالية.

5- طريقة الجزاء والعقاب (*Vogel*):

تعتبر هذه الطريقة الأفضل في التطبيق لأنها تقوم على التوزيع حسب التكاليف، ويتم تطبيقها بإتباع الخطوات التالية:

- نحسب الفرق بين أدنى تكلفة والتي تليها لكل سطر ولكل عمود؛
- نختار أكبر فرق؛
- نوزع حسب أدنى تكلفة.

ملاحظة: عند تساوي الفوارق نوزع في الخانة ذات أدنى تكلفة.

X_i \ Y_i	Y_1		Y_2		Y_3		$\sum$
X_1	×	4	56	8	×	8	56 0
X_2	×	16	41	24	41	16	82 41 0
X_3	72	8	5	16	×	24	77 5 0
$\sum$	72 0		102 46 5 0		41 0		215
		4	8		8		
		•	8		8		
			8		8		
			8		•		
			•				

نلاحظ مع بداية التوزيع بعد حساب الفوارق تساوي أكبر قيمة وهي (8) سنختار أدنى تكلفة لها، كذلك هي متساوية وبالتالي سنختار أكبر كمية ثم نوزع. بعد ذلك نعيد الخطوات حتى نكمل التوزيع. نحسب قيمة Z:

$$Z = 56\,(8) + 41\,(24) + 41\,(16) + 72\,(8) + 5\,(16) = 2744$$

نلاحظ تغير التوزيع وأنها خفضت تكاليف النقل إلى $Z = 2744$.

➢ **تقييم طريقة الجزاء والعقاب:** تعتبر أفضل الطرق على الإطلاق لأنها تسمح بالوصول إلى الحل الأمثل بسرعة، **حيث في معظم الحالات** بالجدول الأول.

بعد التعريف بهذه الطرق حيث توصلنا فقط إلى الجدول الأول مما يستوجب تحسينه وفق مراقبة أمثلية الحل.

5- مراقبة أمثلية الحل وتحسينه:

إن الحل المتوصل إليه في الجدول الأول باستخدام إحدى طرق الحل قد يكون حلاً أمثلا أم غير أمثل، لذلك يجب رقابة أمثليته وفق الخطوات التالية:

1- إضافة عمود (I) وسطر (J) للجدول وتحديد قيمهما **للخانات المملوءة فقط** وفقا للعلاقة:

$$\boxed{I_i + J_j = C_{ij},\ \forall X_{ij} > 0}$$

2- البحث عن إمكانية تخفيض التكاليف بتحديد الاقتصاد الممكن في التكاليف **لكل الخانات** والذي يرمز له بـ ($\boxed{E_{ij}}$) وفقا للعلاقة: $\boxed{E_{ij} = I_i + J_j - C_{ij},\ \forall X_{ij} \geq 0}$

في حالة Min يعتبر الحل أمثلا إذا كان قيم $0 \geq E_{ij}$؛

أما في حالة Max يعتبر الحل أمثلا إذا كان قيم $0 \leq Eij$.

وبالتالي، إذا كان $0 < E_{ij}$ الحل ليس أمثلا، مما يستوجب التحسين.

4- يتم التحسين إذا كان $0 < E_{ij}$ (إذا كان لـ E_{ij} قيمتان سالبتان نختار الأكبر بالقيمة المطلقة $|E_{ij}|$)، حيث نضع في تلك الخانة Δ بشرط المحافظة على التوازن عن طريق المسلك المغلق ذو الزوايا القائمة (أي أنه ينطلق من Δ ويعود إليها)، فهو ويجب أن تكون هذه الزوايا في الخانات المملوءة (قيم موجبة).

➢ **شروط المسلك المغلق هي:**

- يجب إضافة أو طرح Δ من خانة مملوءة؛
- نبدأ بـ $+\Delta$ ثم $-\Delta$ ثم $+\Delta$ وهكذا؛
- عدد Δ يجب أن لا يتجاوز إثنان في كل سطر وفي كل عمود.

ولتكوين جدول التحسين، يجب حساب قيمة Δ كما يلي:

$$\Delta = min\ X_{ij}/(X_{ij} - \Delta)$$

أي أن قيمة Δ تمثل أصغر قيمة لـ X_{ij} وذلك فقط في الخانات التي فيها Δ-.

5- يتم تكرار نفس الخطوات السابقة إلى غاية الوصول إلى الحل الأمثل ($0 \leq E_{ij}$).

مثال: نفس المثال السابق عند تطبيق طريقة أدنى عنصر في الجدول:

X_i \ Y_i		Y_1	Y_2	Y_3	$\sum$
i	j	4	12	4	
X_1	0	4 56 0 -Δ	8 Δ 4	8 -4	56
X_2	12	16 0	24 41 0	16 41 0	82
X_3	4	8 16 0 +Δ	16 61 0 -Δ	24 16	77
$\sum$		72	102	41	215

نفرض: $I_1 = 0$ ثم نكمل حساب بقية قيم I,J.

ملاحظة: إن قيم E_{ij} للخانات المملوءة يجب أن تساوي الصفر.

نلاحظ من الجدول الأول وجود قيمة موجبة لـ E_{ij} وبالتالي الحل ليس أمثلا يجب التحسين. بتشكيل المسار المغلق وتحديد قيمة Δ حيث: $\boxed{\Delta = 56.}$

X_i \ Y_i		Y_1	Y_2	Y_3	$\sum$
		0	8	0	
X_1	0	4 -4	8 56 0	8 -8	56
X_2	16	16 0	24 41 0	16 41 0	82
X_3	8	8 72 0	16 5 0	24 16-	77
$\sum$		72	102	41	215

نلاحظ كل قيم $E_{ij} \geq 0$ ومنه الحل أمثلا حيث يجب توزيع: 56 مكتب من X_1 إلى Y_2، 41 مكتب من X_2 إلى Y_2 و41 مكتب من X_2 إلى Y_3 و72 مكتب من X_3 إلى Y_1 و5 مكاتب من X_3 إلى Y_3 لتحقيق أدنى تكلفة نقل تقدر ب: $Z = 56(8) + 41(24) + 41(16) + 72(8) + 5(16)$

$=$ $\boxed{2744 \text{ دج.}}$

نلاحظ نفس الحل الذي وجدناه بتطبيق طريقة الجزاء والعقاب.

ملاحظة: إن وجود E_{ij} في خانة فارغة يعني وجود حل بديل (توزيع آخر) وهي حالة خاصة.

6- تطبيق طريقة النقل في حالة التعظيم (*Max*):

إن أول استخدام لطريقة النقل كان لدراسة مشكلة تخفيض تكاليف النقل، إلا أنه توسع مجال تطبيقها لدراسة مسائل تعظيم العوائد (الأرباح، رقم الأعمال،...) من خلال إتباع أحد الأسلوبين وهما:

أ- تحويل مصفوفة الأرباح إلى مصفوفة تكاليف ثم حلها بالطرق المذكورة سابقا، من خلال تحديد أعلى ربح في المصفوفة وطرح باقي الأرباح منه ثم حلها بالطرق المذكورة سابقا.

$$Max \longrightarrow Min$$

$X_i \backslash Y_i$	Y_1	Y_2	Y_3	$\sum$
X_1	3	5	7	10
X_2	6	2	9	20
$\sum$	10	10	10	30

$X_i \backslash Y_i$	Y_1	Y_2	Y_3	$\sum$
X_1	6	4	2	10
X_2	3	7	0	20
$\sum$	10	10	10	30

ثم نتبع إحدى طرق الحل المذكورة في حالة *Min*.

ب- بقاء مصفوفة الأرباح كما هي وحلها باستخدام طريقة النقل لكن مع الاختلاف في بعض القواعد كما يلي:

- ❖ تحديد قيم I و J كما يلي: $I_i + J_j = -C_{ij}$.
- ❖ تحديد قيم E_{ij} كما يلي: $E_{ij} = I_i + J_j + C_{ij}$، حيث أن:

$E_{ij} > 0$ فإن الحل ليس أمثلا يجب التحسين حيث نختار الخانة المملوءة ذات أكبر قيمة موجبة ($Max\ E_{ij}$) ونضع فيها Δ ثم نشكل مسار مغلق ونكمل الحل.

أما إذا كان $E_{ij} \leq 0$ فإن الحل أمثل.

ملاحظة: كيفية تطبيق طريقة الجزاء والعقاب لحل مشكلة *Max* كما يلي:

- حساب الفرق بين أكبر رقم والأصغر منه مباشرة؛

- يتم التوزيع حسب أكبر فرق في الخانة ذات أكبر عائد.

7- الحالات الخاصة بطريقة النقل:

1- حالة عدم التوازن (عدم تساوي العرض مع الطلب):

لقد وضحنا سابقا أنه قبل تطبيق أي طريقة للحل يجب أن يكون العرض = الطلب، لكنه في الواقع نادر الحدوث لذلك إذا كان:

- العرض أقل من الطلب يجب أن نضيف سطرًا **وهميا تكلفته صفر** ثم نكمل الحل.
- الطلب أقل من العرض يجب أن نضيف عمودًا وهميا تكلفته صفر ثم نكمل الحل.

2- حالة الإنحلالية (الحلول الناقصة):

يعتبر الحل ناقصا إذا كان عدد الخانات المملوءة (X_{ij}) أقل تماما من ($X_{ij} < m + n - 1$) حيث يستحيل الوصول إلى الحل الأمثل. ويتم معرفة هذه الحالة من خلال عدم القدرة على تحديد بعض قيم I وJ. وبالتالي يجب إضافة قيمة صغيرة جدًا هي ε تقـــدر بــــ $\varepsilon = 0,0000001$ حيث:

$X_{ij} = X_i \pm \varepsilon$ ثم نكمل الحل.

ملاحظة: يجب إضافة ε	**في خانة فارغة بحيث لا تشكل مسارًا مغلقا مع بقية الخانات المملوءة.**

3- حالة الطرق الممنوعة: تظهر هذه الحالة عند استحالة العلاقة بين سطر ما وعمود مـــا لظروف معينة مثلا عدم توفر مواصفات مادة ما لطلب مستهلك ما. مما يستوجب تقييد (غلـــق) الطريق الممنوع أي عدم التوزيع في تلك الخانة من خلال وضع أكبر تكلفة تفوق بقية التكاليف في المسألة ثم نقوم بالحل بإتباع إحدى الطرق.

4- حالة الحلول البديلة: إذا وجدنا $E_{ij} = 0$ في خانة فارغة فإنه يوجد حل بديل حيـــث نضع Δ في تلك الخانة ثم نشكل مسار مغلق ونكمل الحل.

8- تطبيقات عملية لطريقة النقل:

لقد توسع تطبيق طريقة النقل من مجال نقل المنتوجات إلى مجالات أخرى أهمها:

- دراسة مشكلة التمويل؛
- دراسة مشكلة تنفيذ المشاريع؛

- تخطيط الشراء؛
- تخطيط الإنتاج والتخزين؛
- تخطيط الإنتاج والنقل.

9- العلاقة بين طريقتي البرمجة الخطية والنقل:

انطلاقا من أن طريقة النقل إحدى حالات البرمجة الخطية، أي أنه يمكن حل مسائل النقل باستخدام طريقة البرمجة الخطية.

مثال:

Y_i / X_i	Y_1	Y_2	Y_3	$\sum$
X_1	2	3	4	10
X_2	5	6	7	20
$\sum$	10	10	10	30

➢ ***عند تساوي العرض مع الطلب:***

النموذج الرياضي للبرمجة الخطية (Min أو Max):

- دالة الهدف: $Min\ Z = 2X_1Y_1 + 3X_1Y_2 + 4X_1Y_3 + 5X_2Y_1 + 6X_2Y_2 + 7X_2Y_3$
- القيود:
  - قيود الأسطر:
$$\begin{cases} X_1Y_1 + X_1Y_2 + X_1Y_3 = 10 \\ X_2Y_1 + X_2Y_2 + X_2Y_3 = 20 \end{cases}$$
  - قيود الأعمدة:
$$\begin{cases} X_1Y_1 + X_2Y_2 = 10 \\ X_1Y_2 + X_2Y_2 = 10 \\ X_1Y_3 + X_2Y_3 = 10 \end{cases}$$
  - قيد عدم السلبية: $X_1Y_1,\ X_1Y_2,\ X_1Y_3,\ X_2Y_1,\ X_2Y_2,\ X_2Y_3 \geq 0$

➢ ***عند عدم تساوي العرض مع الطلب:***

العرض أكبر من الطلب:

- دالة الهدف: $MinZ = \sum C_{ij} X_i Y_i$
- القيود:
- قيود الصفوف: $\sum X_i Y_i \leq b_j$

الطلب أكبر من العرض:

- دالة الهدف: $MinZ = \sum C_{ij} X_i Y_i$
- القيود:
- قيود الأسطر: $\sum X_i Y_i = b_j$

- قيود الأعمدة: $\sum X_i Y_i = b_j$ - قيود الأعمدة: $\sum X_i Y_i \leq b_j$

- قيد عدم السلبية: $X_i Y_i \geq 0$ - قيد عدم السلبية: $X_i Y_i \geq 0$

10- تقييم طريقة النقل: انطلاقا من أنها إحدى حالات البرمجة الخطية، فإن لها مزايا وعيوب هذه الطريقة لكن أهم عيوبها هو إهمالها للجانب غير الكمي.

الفصل الثالث

التعييــن (التخصيص *Affectation*)

الفصل الثالث: طريقـــة التعييـــن

1- تعريف طريقة التعيين:

تعد هذه الطريقة من أبسط الطرق على الإطلاق، وهي تمثل إحدى حالات طريقة النقل، فهي كذلك تقوم على التوزيع الأمثل للموارد. لكنها تتطلب تعيين مورد واحد لمستهلك واحد.

مثلا: توزيع *4* عمال على *4* ورشات أي نوزع العامل الواحد للورشة الواحدة.

2- شروط استخدام طريقة التعيين:

قبل تطبيق طريقة التعيين يجب التأكد من توفر الشروط التالية:

- تساوي عدد الموردين مع عدد المستهلكين.
- أن يستطيع كل من الموردين تلبية رغبة أي مستهلك بتكلفة ما أو ربح ما.
- يمكن لكل مورد تلبية رغبة مستهلك واحد فقط.
- أن يكون الهدف التعظيم أو التخفيض.

3- النموذج الرياضي لطريقة التعيين:

يتكون النموذج الرياضي لطريقة التعيين من:

- دالة الهدف (*Max* أو *Min*): $OptZ = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$
- القيود:

1- كل الموارد يجب توزيعها أي: $\sum_{j=1}^{m} X_{ij} = a_i = 1$

2- كل الحاجيات يجب تلبيتها، أي: $\sum_{i=1}^{\$} X_{ij} = b_j = 1$

3- قيمة X_{ij} إما *1* أو *0*، أي: $X_{ij} = X^2_{ij}$

- قيد عدم السلبية: $X_{ij} \geq 0$

ملاحظة: نلاحظ في القيد الثالث العلاقة من الدرجة الثانية وبالتالي استحالة تطبيـــق طريقـــة البرمجة الخطية بل لها طرقا للحل خاصة بها.

4- طرق حل مسألة التعيين:

يوجد طريقتين لحل مسألة التعيين وهما:

4-1- طريقة العد الكامل:

تقوم هذه الطريقة على التحديد الكامل لكل البدائل الممكنة، ويتم حسابها وفــق عـــاملي عدد الأسطر أو عدد الأعمدة (لأنه من شروط التعيين تساوي عدد الأسطر مع عدد الأعمدة).

مثال: لدينا 3 عمال نريد توزيعهم على 3 وظائف، فما هو التعيين الأمثل لهم؟

نحسب $3!$ كما يلي: $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

ومنه لدينا 6 بدائل.

- **عيب هذه الطريقة:** نلاحظ صعوبة استخدام هذه الطريقة عند كـــبر عـــدد الأســـطر أو الأعمدة. كما أنها لاتبين نوع البدائل (كيفيات التوزيع).

4-2- الطريقة الهنغارية:

تعتبر هذه الطريقة الأكثر استعمالا. وتقوم على إتباع المراحل التالية:

1- مرحلة وضع الأصفار.

2- مرحلة رقابة أمثلية الحل.

3- مرحلة التحسين.

مثال:

قامت الجامعة بشراء 4 أنواع من أجهزة الكمبيـــوتر(M_1، M_2، M_3، M_4). ويريـــد مسؤول التجهيز توزيعها على 4 كليات (ك$_1$= الاقتصـــاد، ك$_2$= الآداب، ك$_3$= الحقـــوق و ك$_4$= الزراعة). ونظرًا للاستعمالات المختلفة لهذه الأجهزة وطاقتها المختلفة، فإن تشغيلها يكلف يوميـــا مايلي (بيانات الجدول 10 دج):

المطلوب: إيجاد التوزيع الأمثل لهذه الأجهزة؟

كليات / أجهزة	ك$_1$	ك$_2$	ك$_3$	ك$_4$
M_1	4	8	7	6
M_2	3	9	6	5
M_3	5	6	3	2
M_4	2	4	1	4

الحل:

1- مرحلة وضع الأصفار: يجب أن يكون في كل سطر وعمود الرقم صفر من خلال طرح من كل عناصر الأسطر أصغر رقم فيها كذلك من كل عمود أصغرها وبالتالي نجد صفر في كل سطر وعمود.

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 7 & 6 \\ 3 & 9 & 6 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2- مرحلة رقابة أمثلية الحل:

نبدأ بالسطر أو العمود الذي يوجد فيه صفر واحد نضعه في مربع $\boxed{0}$ ونشطب الأصفار الباقية في نفس السطر وفي نفس العمود. ثم ننتقل إلى السطر أو العمود الذي فيه صفران نختار أحدهما ونضعه في مربع ونشطب بقية أصفار نفس السطر والعمود وهكذا.

- إذا وجدنا في كل سطر وكل عمود صفرًا واحدًا في مربع فإن الحل أمثل والعكس صحيح يجب التحسين.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

نلاحظ السطر الثاني والعمود الثالث لا يوجد بهما صفر في مربع وبالتالي يجب التحسين.

3- مرحلة تحسين الحل:

تتم مرحلة تحسين الحل وفق الخطوات التالية:

- نشطب أصفار المصفوفة بأدنى عدد من الخطوط المستقيمة (أفقية وعمودية) أي أقل من عدد الأسطر والأعمدة.
- العناصر الباقية وغير المشطبة في المصفوفة نطرح منها أصغر رقم.
- نضيف هذا الرقم الأصغر للعناصر المشطبة مرتين (افقيا وعموديا).
- نعيد عملية رقابة الأمثلية حتى نصل الحل الأمثل.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

نراقب أمثلية الحل   نلاحظ أصغر رقم غير مشـــطب

هو 1

نلاحظ في كل سطر وعمود $\boxed{0}$ أي الحل أمثل حيث يجب توزيع M_1لكلية الآداب وM_2لكلية الاقتصاد وM_3 لكلية الزراعة وM_4 لكلية الحقوق لتحقيق أدنى تكلفة تقدر ب: $Z = 8 + 3 + 2 + 1 = \boxed{14}$ $\boxed{\text{دج}}$

5- تطبيق طريقة التعيين لحل مشكلة التعظيم (Max):

تطبق كذلك طريقة التعيين لحل مشكلة التعظيم (أرباح، إنتاجية، رقم الأعمال، ...).

ويتم ذلك وفق مرحلتين هما:

1- تحويل مصفوفة Max إلى Min من خلال البحث عن أكبر عنصر في المصفوفة ثم نطرح منه بقية عناصر المصفوفة.

2- حل مشكلة Min وفق الخطوات الموضحة سابقا.

مثال:

$$\underset{Max}{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}} \rightarrow \underset{Min}{\begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

6- الحالات الخاصة لطريقة التعيين:

6-1- حالة عدم التوازن:

نجد هذه الحالة عند عدم تساوي عدد الأسطر مع عدد الأعمدة أي إذا كان عدد الأسطر أقل من عدد الأعمدة نضيف سطرا وهميا قيمه أصفار أما إذا كان عدد الأسطر أقل من عدد الأعمدة نضيف سطرا وهميا قيمه أصفار ثم نكمل الحل.

مثال:

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & \\ 10 & 2 & \\ 14 & 11 & \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 10 & 2 & 0 \\ 14 & 11 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$ نكمل الحل.

6-2- حالة الطرق الممنوعة:

وهي حالة استحالة العلاقة بين مورد ما ومستهلك ما. فإذا كانت مشكلة Min نضع في الطريق الممنوع أكبر تكلفة أما إذا كان Max نضع الصفر ثم نكمل الحل.

6-3- حالة الحل البديل:

نجد هذه الحالة عند الاختيار بين عدة أصفار لوضعها في مربع.مثلا:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \\ & & \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \\ & & \end{pmatrix}$$

4-6- حالة وجود عناصر سالبة في المصفوفة:

لا يمكن حل مسائل التعيين في حالة وجود عناصر سالبة في المصفوفة، لذلك يجب تعديلها عن طريق إضافة لكل عناصر المصفوفة القيمة ($-X_{ij}$) حيث X_{ij} تمثل أصغر قيمة سالبة ثم نكمل الحل.

<u>مثال:</u>

$$\begin{pmatrix} 4 & -12 & 3 \\ 10 & 2 & 8 \\ 14 & 11 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 16 & 0 & 15 \\ 22 & 14 & 20 \\ 26 & 23 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow .$$ نكمل الحل

نضيف – (-12)   أصغر رقم سالب هو (-12)