الفصل الثاني

الفائدة المركبة

الفائدة المركبة

- **1 - \ تعريف:**
- نقول عن مبلغ أنه أودع بفائدة مركبة، عندما يتم إضافة الفائدة البسيطة لهذه الفترة إلى المبلغ الأصلي لحساب الفائدة للفترة الموالية، وهكذا في نهاية كل فترة يتم إضافة الفائدة البسيطة الناتجة إلى الرأسمال أو المبلغ المحصل، ثم يتم حساب الفائدة على أساس المبلغ (الرأسمال) والفوائد الناتجة سابقا.

الفائدة المركبة

- **مثال:** رأس مال قدره: 100.000 دج اودع في بنك بمعدل 6 % بفائدة مركبة . كم سيعطي بعد ثلاث سنوات؟

السنوات	المبلغ المودع في بداية السنة	الفوائد الناتجة خلال سنة	المبلغ المحصل في نهاية السنة
1	100000	6000 = 0,06 × 100000	106000
2	106000	6360 = 0,06 × 10600	112360
3	112360	= 0,06 × 112360 6741,60	119101,60

الفائدة المركبة

- **2 \ القانون العام للفائدة المركبة:**
- لتكن الرموز التالية :
- المبلغ الأصلي المودع :a،
- سعر الفائدة: i،
- عدد الفترات: n
- القيمة المكتسبة من المبلغ a في نهاية n فترة: A

الفائدة المركبة

السنوات[2]	المبلغ المودع في بداية الفترة	الفائدة الناتجة خلال الفترة	الرأسمال المحصل في نهاية الفترة
1	a	ai	$a + ai = a(1+i)$
2	$a(1+i)$	$a(1+i)i$	$a(1+i) + a(1+i)i = a(1+i)(1+i) = a(1+i)^2$
3	$a(1+i)^2$	$a(1+i)^2 i$	$a(1+i)^2 + a(1+i)^2 i = a(1+i)^2(1+i) = a(1+i)^3$
4	$a(1+i)^3$	$a(1+i)^3 i$	$a(1+i)^3 + a(1+i)^3 i = a(1+i)^4$
. . .	. . .	. . .	. . .
n	$a(1+i)^{n-1}$	$a(1+i)^{n-1} i$	$a(1+i)^{n-1} + a(1+i)^{n-1} i = a(1+i)^n$

الفائدة المركبة

- من الجدول نستنتج القانون العام للفائدة المركبة: $A = a(1+i)^n$

- **<u>مثال:</u>**
- مبلغ 100.000 دج وضع في بنك بمعدل 6 % لمدة 10 سنوات كم يصبح في نهاية الفترة؟

الفائدة المركبة

- **الحل:**
- $A = a\,(1+i)^n \Rightarrow A = 100.000\,(1+0{,}06)^{10}$

$A = 100.000 \times 1{,}790848$

- $A = 179084{,}8$ DA
- حيث أن المقدار $(1+0{,}06)^{10}$ نجده في الجدول المالي رقم1: $(1+0{,}06)^{10} = 1{,}790848$

الفائدة المركبة

- **<u>ملاحظة1:</u>** في الجدول (1) العلاقة $A=a(1+i)^n$ تطبق مهما كانت وحدة الفترة المستعملة بشرط أن يكون المعدل المطبق يتناسب مع الفترة. أي إذا كان **i** شهري يجب أن تكون الفترة شهرية و إذا كان **i** سداسي أو ثلاثي يجب أن تكون الفترة سداسية أو ثلاثية وهكذا.

- **<u>ملاحظة2:</u>** القيم المكتسبة من رأسمال a في نهاية 1،2،3 ،.....n فترة تشكل متتالية هندسية أساسها (1+i) وحدها الأول $a(1+i)$.

- **4 – 3 \ مقارنة بين الفائدة البسيطة والفائدة المركبة:**

- **مثال**:

- رأسمال مبلغه 10000 دج أودع بمعدل فائدة سنوي 10 %
- أحسب الفائدة البسيطة والفائدة المركبة المحصلة خلال : 6 أشهر ، سنة ، سنة ونصف ، سنتين .
- ماذا تلاحظ ؟

الفائدة المركبة

- **الحل:**

نوع الفائدة	6 شهور	سنة	سنة ونصف	سنتين
الفائدة البسيطة I_S	$I_{S}= 10000 \times 0.1 \times \frac{1}{2}$ $\boxed{I_S= 500DA}$	$I_{S}=10000 \times 0.1 \times 1$ $\boxed{I_S= 1000}$	$I_{S}=10000 \times 0.1 \times \frac{18}{12}$ $\boxed{I_S= 1500DA}$	$I_{S}=10000 \times 0.1 \times 2$ $\boxed{I_S= 2000DA}$
الفائدة المركبة I_C	$10000(1.1)^{\frac{1}{2}}$ ومنه $\boxed{I_{C}=488\ DA}$	$10000(1.1)$ ومنه $\boxed{I_{C}=1000\ DA}$	$10000(1.1)(1.1)^{\frac{1}{2}}$ ومنه $\boxed{I_{C}=1536\ DA}$	$10000(1.1)^{2}$ ومنه $\boxed{I_{C}=2100DA}$

الفائدة المركبة

- نلاحظ ما يلي:
- - خلال فترة أقل من سنة تكون الفائدة البسيطة أكبر من الفائدة المركبة .
- - خلال فترة تساوي سنة مع ثبات معدل الفائدة تكون الفائدة البسيطة تساوي الفائدة المركبة.
- - عندما تزيد الفترة عن سنة مع ثبات معدل الفائدة فإن الفائدة المركبة تكون أكبر من الفائدة البسيطة.
- ومنه يمكن القول بأن المقرض(البنك) يفضل استخدام علاقة الفائدة البسيطة في حالة الفترة أقل من سنة وعلاقة الفائدة المركبة في حالة فترة تزيد عن سنة.

4 – 4 \ حساب القيمة المكتسبة في حالة n ليست عددا تاما:

عند تطبيقنا للعلاقة العامة للفائدة المركبة $A=a\,(1+i)^n$ ، افترضنا أن n عددا تاما، ولكن عدد الفترات يمكن أن يكون عددا غير تام.

مثلا: n تساوي 8 سنوات وخمسة أشهر $n=8+\frac{5}{12}$

ففي هذه الحالة توجد عدة طرق للحل.

الفائدة المركبة

1-4-4 الطريقة الأولى: الحل الحقيقي

تستخدم القاعدة العامة لحساب الجزء التام وتستخدم الفائدة البسيطة في حساب الجزء المتبقي (الكسر)

وهذه الطريقة يطلق عليها المختصون" الحل الحقيقي".

نفرض: $n= k + \frac{p}{Q}$ ، ففي نهاية k سنة ، القيمة المكتسبة من إيداع مبلغ a هي : $A_K = a\ (\ 1+i)^{\ k}$

لنحسب الفائدة البسيطة المحصلة من إيداع A_k لفترة P/Q سنة بمعدل فائدةسنوي i:

$$A_K\ .i\ .\frac{p}{Q} = a\ (\ 1+i)^k.i.\frac{p}{Q}$$

ومنه نجد القيمة المكتسبة A_n كما يلي:

$$A_n = a\ (1+i)^k + a\ (\ 1+i)^k.i.\frac{p}{Q} \quad \Rightarrow \quad A_n = a\ (\ 1+i)^k\ (\ 1+i\frac{p}{Q}\ )$$

الفائدة المركبة

مثال:

نفس المعطيات السابقة، مع $n = 8$ سنوات و5 أشهر

$$A = a(1+i)^8 + a(1+i)^8 . i . \frac{5}{12} \Rightarrow A = a(1+i)^8 \left(1+\frac{5}{12} i\right)$$

$$\Rightarrow A = 100000\,(1.06)^8 \left(1+\frac{5}{12} \times 0.06\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{A = 163369{,}42 \text{ DA}}$$

الفائدة المركبة

4-4-2الطريقة الثانية: الحل التجاري

$$A_{k+\frac{p}{Q}} = a(1+i)^{k+\frac{p}{Q}} \Rightarrow A_{k+\frac{p}{Q}} = a(1+i)^{k}(1+i)^{\frac{p}{Q}}$$

ومنه :

$$A_{k+\frac{p}{Q}} = a(1.06)^{8+\frac{5}{12}} \Rightarrow A_{8+\frac{5}{12}} = a(1.06)^{8}(1.06)^{\frac{5}{12}}$$

$$\Rightarrow A_{8+\frac{5}{12}} = 100000(1.06)^{8}(1.06)^{\frac{5}{12}}$$

$$\Rightarrow A_{8+\frac{5}{12}} = 163302.47DA$$

حيث المقدار $(1.06)^{\frac{5}{12}}$ يمكن الحصول عليه من الجدول المالي

- **4 - 5- \تكافؤ معدلات الفائدة (أسعار الفائدة المتكافئة):**

•**تعريف:** معدلي فائدة يمثلان فترتين للرسملة مختلفتين (مثلا أحدهما سنوي والآخر ثلاثي) نقول أنهما متكافئين، إذا أعطيا نفس القيمة المكتسبة بفائدة مركبة خلال نفس مدة الإيداع.

•**مثال:**

- 1 دج أودع بمعدل فائدة سنوي i_a يصبح في نهاية السنة $1+i_a$.
- 1 دج أودع بمعدل فائدة سداسي i_s يصبح في نهاية السنة $(1+i_s)^2$.

الفائدة المركبة

- المعدلين i_a و i_s نقول أنهما متكافئين إذا كانت القيمتين المكتسبتين $(1+i_a)$ و $(1+i_s)^2$ متساويتان.

- أي : $(1+i_a) = (1+i_s)^2$
- بالنسبة لمعدل ثلاثي يكافئ معدل سنوي يعطى التكافؤ كما يلي:
- $1+i_a = (1+i_t)^4$
- بالنسبة لمعدل شهري يكافئ معدل سنوي: $1+i_a = (1+i_m)^{12}$
- بالنسبة لمعدل i_q يناسب (يمثل) النسبة $1/q$ من السنة التكافؤ يعطى بالعلاقة التالية: $1+i_a = (1+i_q)^q$

الفائدة المركبة

مثال: أحسب معدلات الفائدة التي تكافئ المعدل السنوي 6 % بالنسبة للسداسي ، الثلاثي، الشهري.

الحل:

حساب المعدل السداسي:

$$1+i_a = (1+i_s)^2 \Rightarrow 1+i_s = (1+i_a)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow 1+i_s = (1+0.06)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow i_s = (1.06)^{\frac{1}{2}} - 1$$

حيث ½ نصف سنة (ستة أشهر) : $(1.06)^{\frac{1}{2}} = 1{,}02956$

ومنه $i_s = 1{,}02956 - 1 \Rightarrow \boxed{i_s = 0{,}02956}$

حساب المعدل الثلاثي:

$$1+i_a=(1+i_t)^4 \quad \Rightarrow \quad 1+i_t=(1+i_a)^{\frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow \quad i_t=(1+i_a)^{\frac{1}{4}}-1$$

$$\Rightarrow \quad i_t=(1.06)^{\frac{1}{4}}-1$$

ومنه نجد :

$$i_t = \quad 1,01467-1 \Rightarrow \boxed{i_t=0,01467}$$

حساب المعدل i_m الشهري:

$$(1+i_a) = (1+i_m)^{12} \Rightarrow 1+i_m = (1+i_a)^{\frac{1}{12}}$$

$$\Rightarrow i_m = (1+0.06)^{\frac{1}{12}} - 1$$

$$\Rightarrow i_m = (1.06)^{\frac{1}{12}} - 1$$

ومنه نجد: $i_m = 1{,}00487 - 1 \Rightarrow \boxed{i_m = 0{,}00487}$

الفائدة المركبة

- تطبيق:
- أحسب القيمة المكتسبة من إيداع مبلغ 1000 دج بمعدل سنوي $i = 0,115$ لكل 1دج وبرسملة سنوية :
- أ- لمدة سبع سنوات .
- ب- لمدة 11 سنة و5 أشهر.

الفائدة المركبة

- **الحل:**
- **ا ـ لمدة سبع سنوات :**
- $A = a(1+i)^n \Rightarrow A = a(1+0{,}115)^7$
- $\Rightarrow A = 1000\,(1+0{,}115)^7$
- $\Rightarrow A = 1000 \times 2{,}142516$
- $\Rightarrow A = 2142{,}516DA$

ب ـ لمدة 11 سنة و5 أشهر:

- **أو<u>لا</u>: الحل الحقيقي:**

- $A = a\ (1+0,115)^{11}\ (1+0,115 \times 5/12) \Rightarrow$
- $A = 1000\ (3,311491)\ (1+0,0479166)$
  - $\Rightarrow A = 1000 \times 3,4701663$
  - $\Rightarrow A = 3470,1663\ DA$

الفائدة المركبة

<u>ثانيا</u>: طريقة الحل التجاري:

$$A = 1000\ (1,115)^{11+5/12} \Rightarrow A = 1000(1,115)^{11}(1.115)^{\frac{5}{12}}$$

$$\Rightarrow A = 1000(3,311491)(1,04640)$$

$$\Rightarrow \boxed{A = 3465,1441\ DA}$$

الفائدة المركبة

<u>4- 6 \ المعدلات المتناسبة:</u>

$\frac{i}{k}$ هو المعدل المتناسب مع المعدل السنوي i، حيث يتعلق أو يطبق لفترة أقل k مرة من السنة.

<u>مثلا</u>: المعدل الثلاثي المتناسب مع المعدل السنوي 4% هو $\frac{4}{0.08} = 0{,}02$ أي 2 %

الفائدة المركبة

مثال:

أحسب المعدلات المتكافئة والمعدلات المتناسبة (سداسية ، ثلاثية، شهرية) مع المعدل السنوي 6%.

الحل:

في المثال السابق، حسبنا المعدلات المتكافئة مع المعدل السنوي 6% .

حيث وجدنا مايلي: $i_s = 0{,}02956 \quad i_t = 0{,}01467 \quad i_m = 0{,}00487$

لنحسب المعدلات المتناسبة:

المعدل السداسي المتناسب مع المعدل السنوي 6% : $\frac{0{,}06}{2} = \boxed{0{,}03}$

المعدل الثلاثي المتناسب مع المعدل السنوي 6% : $\frac{0{,}06}{4} = \boxed{0{,}015}$

المعدل الشهري المتناسب مع المعدل السنوي 6% : $\frac{0{,}06}{12} = \boxed{0{,}005}$

الفائدة المركبة

نلاحظ من النتائج السابقة بأن المعدل المتناسب مع المعدل السنوي i يكون غالبا أكبر من المعدل المكافئ لنفس المعدل السنوي i. ويمكن توضيح ذلك فيما يلي:

ليكن i_s المعدل السداسي المكافئ للمعدل السنوي i_a.

ليكن $\frac{i_a}{2}$ المعدل السداسي المتناسب مع المعدل السنوي i_a.

$$(1+i_s)^2 = 1+i_a \Rightarrow 1+2\,i_s + i_s^2 = 1+i_a$$

$$\Rightarrow i_a = 2\,i_s + i_s^2 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

بقسمة طرفي العلاقة (1) على 2 نجد :

$$\Rightarrow \frac{i_a}{2} = i_s + \frac{i_s^2}{2}$$

بما أن $\frac{i_s^2}{2}$ أكبر من الصفر فإن $\frac{i_a}{2} > i_s$ أي أن المعدل المتناسب أكبر من المعدل المكافئ.