**تعريف الإحصاء:** هو مجموعة الطرق العلمية التي تسمح بجمع البيانات المتعلقة بظاهرة معينة وتبويبها في جداول إحصائية وعرضها في صورة أشكال بيانية، وتحليلها باستخدام مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت وغيرها من المقاييس الأخرى

**أولا : السلسلة الإحصائية ذات متغير واحد**

**I- مفاهيم ومصطلحات:**

1- **المجتمع:** هي كل المفردات أو العناصر المراد دراستها، مثال: مجموعة من الطلبة.
2- **العينة:** هي مجموعة جزئية من المجتمع محل الدراسة
3- **الوحدة الإحصائية:** هي الوحدة الأساسية التي يتكون منها المجتمع الإحصائي
4- **الميزة:** هي الخاصية التي يرغب الباحث في دراستها (أو هي القاسم المشترك بين عناصر المجموعة). مثال: الطول بالنسبة لمجموعة من الطلبة.

***أنواع الميزة:** عندما تأخذ الميزة قيما عددية (تكون قابلة للقياس)، عندها نكون بصدد متغير كمي وهذا الأخير يمكنه أن يكون منقطعا أو مستمرا.

ميزة كمية $\xleftarrow[\text{ترفق بـ:}]{\text{قابلة للقياس}}$ متغير كمي $\begin{cases} \text{منقطع} \\ \text{مستمر} \end{cases}$

*عندما لا تأخذ الميزة قيما عددية (تكون غير قابلة للقياس) نكون بصدد ميزة نوعية بالتالي متغير نوعي

ميزة نوعية $\xleftarrow[\text{ترفق بـ:}]{\text{غير قابلة للقياس}}$ متغير نوعي

5- **الكيفيات:** هي الحالات الممكنة للميزة
6- **المتغير الإحصائي:** يوضح مختلف القيم التي يمكن أن تأخذها الميزة ويرمز له بـ لا أو نعم...الخ، وهو نوعان المتغير الإحصائي المنقطع، والمتغير الإحصائي المستمر

II- **الجدول الإحصائي:** هي إحدى وسائل تصنيف أو تبويب البيانات الإحصائية إذا كانت الميزة نوعية.

## 1- كتابة الجدول الإحصائي في حالة ميزة نوعية

بحيث

| ni | G |
|---|---|
| $n_1$ | $m_1$ |
| $n_2$ | $m_2$ |
| . | . |
| . | . |
| . | . |
| $n_n$ | $m_n$ |
| N | $\sum$ |

$N= n_1+n_2.....n_n$

## 2- كتابة جدول إحصائي في حالة ميزة كمية

a- **<u>حالة x متقطع</u>**: ليكن x متغير إحصائي متقطع بحيث $x_1, x_2, ....., x_n$ هي قيم المتغير الإحصائي: $n_1,n_2,.....,n_n$ هي قيم التكرار المناسبة لقيم x بحيث $\in nisn$

يكون الشكل العام للجدول الإحصائي في حالة x متقطع كما يلي.

| ni | X |
|---|---|
| $n_1$ | $x_1$ |
| $n_2$ | $x_2$ |
| . | . |
| . | . |
| . | . |
| $n_n$ | $x_n$ |
| N | $\sum$ |

b- **<u>حالة x مستمر</u>**:يتم بناء جدول إحصائي بإتباع الخطوات الآتية:

1- اختيار عدد الفئات k والذي يساوي تقريبا إلى $\sqrt{N}$ حيث N: عدد العناصر.

2- يحسب مدى التوزيعe الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة في التوزيع

حيث: $e=e_N-e_0$

3- يحسب طول الفئة حيث $ai = \frac{e}{k}$

4- حساب مراكز الفئات حيث: $c_i= \frac{e_0+e_1}{2}$

| ci | ni | X |
|---|---|---|
| $c_1$ | $n_1$ | $]e_1-e_0]$ |
| $c_2$ | $n_2$ | $]e_2-e_1]$ |
| . | . | . |
| . | . | . |
| . | . | . |
| . | . | . |
| $c_n$ | $n_n$ | $]e_n-e_{n-1}]$ |
| / | N | $\sum$ |

## III. الشكل البياني:

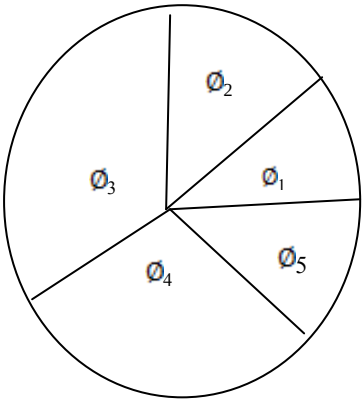
### 1- ميزة نوعية:

a- **القطع الدائرية**:حيث تتناسب قيم التكرار $n_i$ ومقدار الزاوية $\emptyset i$ تناسبا طرديا

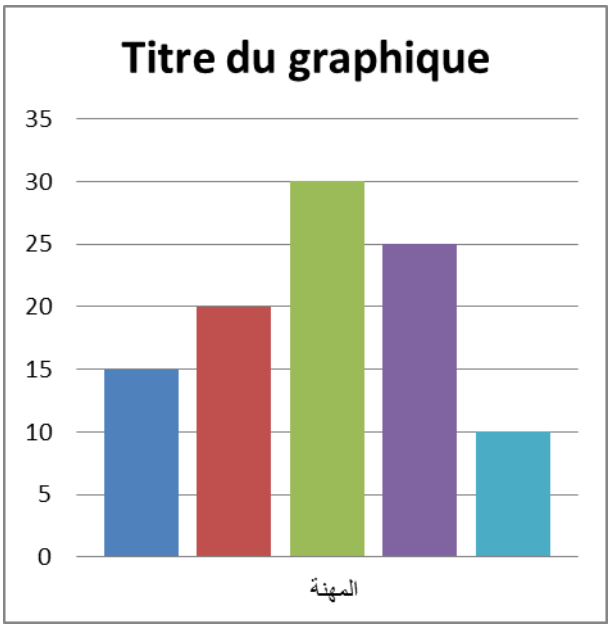
حيث: $\emptyset i = \frac{ni}{N}$x360

مثال:

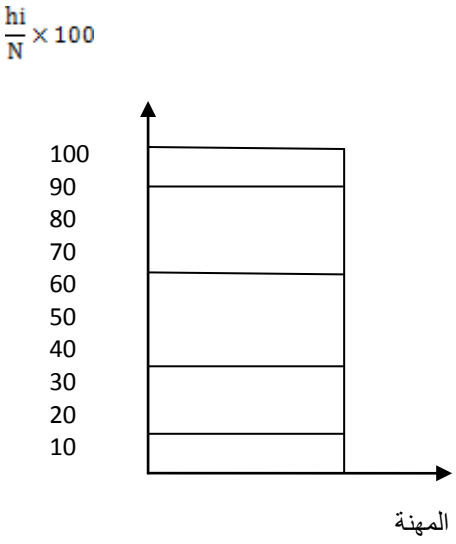
| المهنة | Ni | $\frac{n}{N}$ | $\frac{n}{N}$ =360 | $\frac{n}{N}$ x100 |
|---|---|---|---|---|
| نجار | 30 | 0,15 | 54° | 15 |
| حداد | 40 | 0,20 | 72° | 20 |
| رصاص | 60 | 0,30 | 108 | 30 |
| لحام | 50 | 0,25 | 90 | 25 |
| بناء | 20 | 0,10 | 36 | 10 |
| $\sum$ | 200 | | 360 | 100 |



b:الأعمدة المستطيلة :




c: العمود المجزأ :

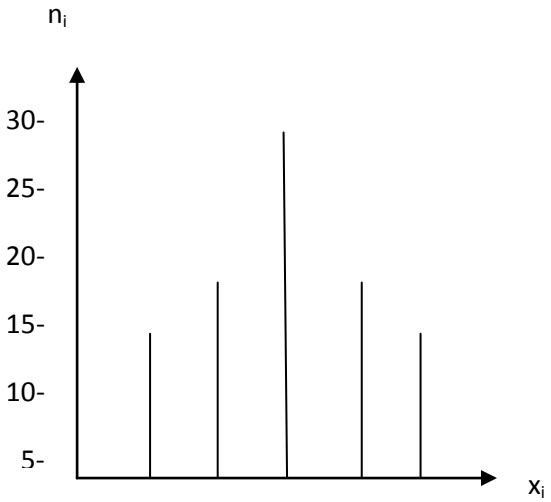



**2- ميزة كمية :**

a: **x متقطع** : يكون الشكل البياني في حالة X متقطع عبارة عن اعمدة بيانية يتم تمثيلها كما يلي :

مثال :

| ni | $x_I$ |
|---|---|
| 10 | 1 |
| 20 | 2 |
| 30 | 3 |
| 25 | 4 |
| 5 | 5 |
| 90 | 3 |



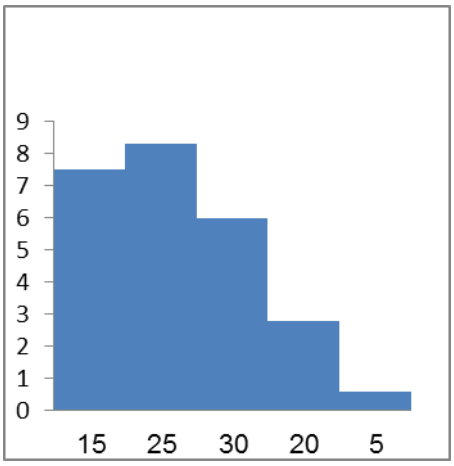

خاصة الأعمدة البيانية يوجد تناسب طردي بين قيمة التكرار $n_i$ وطول العمود li .

**x-b مستمر**

**1-b المدرج التكراري** : *حالة تساوي طول الفئات :

مثال :

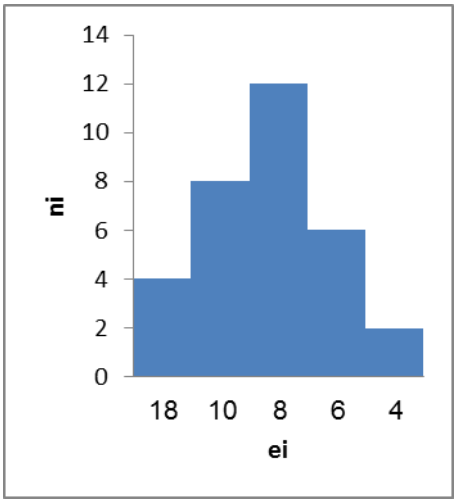
| $0\frac{n_i}{ai}$ | ai | $n_i$ | $e_i$ |
|---|---|---|---|
| 7,5 | 2 | 15 | ]17−15 ] |
| 8,33 | 3 | 25 | ]20−17 ] |
| 6 | 5 | 30 | ]25−20 ] |
| 285 | 7 | 20 | ]32−25 ] |
| 0,625 | 8 | 5 | ]40−32] |
| / | | 95 | ∑ |




*حالة تساوي طول الفئات :

مثال :

| ai | $n_i$ | $e_i$ |
|---|---|---|
| 2000 | 4 | ]4000−2000 ] |
| 2000 | 8 | ]6000−4000 ] |
| 2000 | 12 | ]8000−6000 ] |
| 2000 | 6 | ]10.000−8000 ] |
| 2000 | 2 | ]18.000−10.000] |
| | 32 | ∑ |

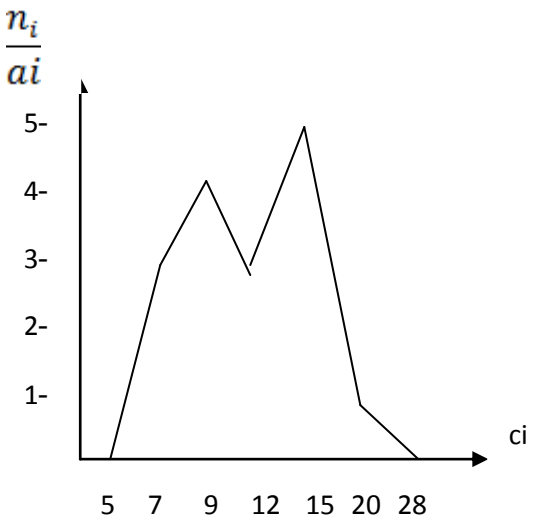



-خاصة المدرج التكراري يوجد تناسي طردي بين قيمة التكرار ni ومساحة المستطيل Ai .

## المضلع التكراري :

**مثال :**

| $e_i$ | $n_i$ | ci | ai | $\frac{n_i}{ai}$ |
|---|---|---|---|---|
| ]6−4] | – | 5 | 2 | – |
| ]8−6 ] | 6 | 7 | 2 | 3 |
| ]10−8 ] | 8 | 9 | 2 | 4 |
| ]14−10 ] | 12 | 12 | 4 | 3 |
| ]16−14] | 10 | 15 | 2 | 5 |
| ]24−16] | 4 | 20 | 8 | 0.5 |
| ]32−24] | – | 28 | 8 | – |
| ∑ | 40 | | | / |



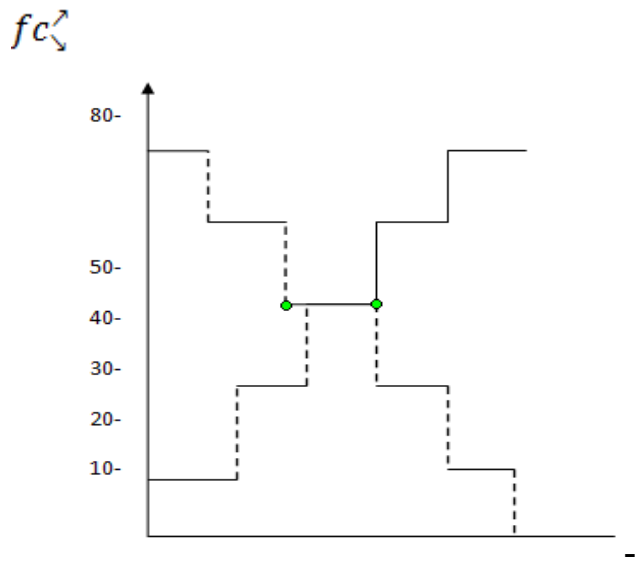

**ملاحظة :** يمكن رسم المضلع التكراري انطلاق من المدرج التكراري وذلك بإيصال مراكز الفئات ببعضها البعض مع إضافة مركز الفئة فـ$_0$ و الفئة فـ$_{n+1}$ .

## 3 – التكرار المتجمع $fc_i$

**التكرار المتجمع الصاعد والنازل حالة × متقطع**

مثال : $X \leq X_I$ $X \geq X_1$

| $fc \searrow$ | $fc \nearrow$ | xi | | $n_i$ | $x_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| - | 0 | 0 | | 10 | 0 |
| 80 | 10 | | | 15 | 1 |
| | | 1 | | | |
| 70 | 25 | | | | |
| | | 2 | | | |
| 55 | 55 | | | 30 | 2 |
| | | 3 | | | |
| 25 | 75 | | | | |
| | | 4 | | 20 | 3 |
| 5 | 80 | | | | |
| | | 5 | | 5 | 4 |
| 0 | - | | | | |
| | | | | 80 | ∑ |

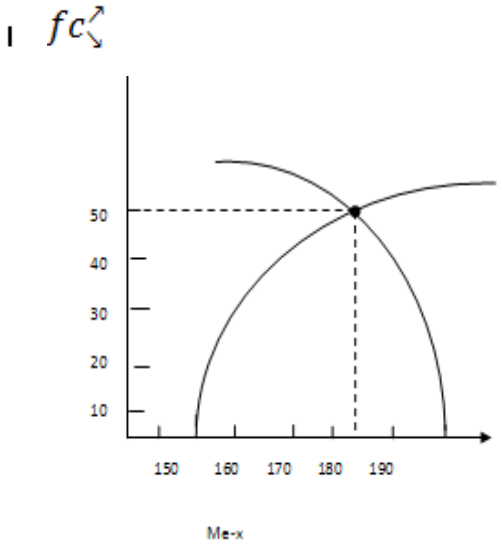



ملاحظة : في حالة × متقطع قيم x وقيم $fc \nearrow$ لا تكتب في نفس الخط

**x مستمر:**

$X \geq e_i$ $r \leq e_i$

| $fc \searrow$ | $fc \nearrow$ | ei | | $f_i$ | $e_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 100 | 0 | 150 | | 18 | ]160-150] |
| 82 | 18 | 160 | | 25 | ]170-160] |
| 57 | 43 | 170 | | 30 | ]180-170] |
| 27 | 73 | 180 | | 15 | ]190-180] |
| 12 | 88 | 190 | | 12 | ]195-190] |
| 0 | 100 | 195 | | 100 | ∑ |



إن تلخيص البيانات العددية في جداول إحصائية وعرضها في صورة أشكال بيانية يعطي الباحث وصف عام وسريع حول الظاهرة المدروسة غير أن لهذه الطريقة حدود ونذكر منها

- لا يمكن استخدامها في تحليل المعطيات
- لا يمكن الاستفادة منها في التنبؤ واتخاذ القرار

لهذه الأسباب وضعت مقياس عددية وصفية تستخدم في التحليل والتنبؤ و اتخاذ القرار تسمى، ب : مقياس النزعة المركزية والموضوع .

مفهوم النزعة المركزية ، يعني ميل مفردات أي ظاهرة من ظواهر إلى التراكم حول قيمة متوسطة ( وسيطة ) ، قم يقل التراكم حول القيمة المتوسطة كلما ابتعدنا إلى جانبين

1- المنوال : هو قيمة x التي يقابلها اكبر تكرار ملاحظة : قد لا يوجد منوال لمجموعة من القيم او قد يكون لها أكثر من منوال .

أ-حالة البيانات غير المبوبة :

مثال 1 : إدا أعطيت لك القيم الآتية : 2، 4، 6 ، 8 ، 10، 12

نلاحظ انه لا يجود منوال لهذه القيم لأنها تكررت بنفس المراتب

مثال 2:

'ذا كانت لديك القيم الآتية : 12 ، 14 16 ، 12 ، 16 ، 14 ، 14 ، 12 ، 20 ، يوجد أكثر من منوال لهذه القيم .

مثال : إذا توفرت لديك المعطيات الآتية : 2،5،7، 9، 20، 3، 8، 5.

يوجد منوال وجيد لهذه القيم : Mo×sS

**حالة البيانات المئوية :**

**1):حالة x متقطع**

مثال :

| ni | $X_i$ |
|---|---|
| 10 | 0 |
| 15 | 1 |
| 25 | 2 |
| 35 | 3 |
| 20 | 4 |
| 5 | 5 |
| 110 | ∑ |

منوال x هو قيمة من قيم $x_i$ التي لها أكبر تكرار

إذن : Mox=3

**2): حالة X مستمرة :**

**الفئة المنوالية** : هي الفئة التي لها تكرار : $n_i$ ( حالة طول الفئات متساوي ) نم أما في حالة عدم تساوي طول الفئات فإن الفئة المنوالية هي الفئة التي لها اكبر تكرار معدل $\frac{ni}{ai}$

a حالة تساوي طول الفئات :

| XI الأرقم الأعمال $10^6$DA | $n_i$ عدد المؤسسات |
|---|---|
| ]12-10 ] | 10 |
| ]14-12 ] | 25 |
| ]16-14 ] | 40 |
| ]18-16 ] | 20 |
| ]20-18] | 15 |
| ∑ | 110 |

الفئة المنوالية هي الفئة [14−16]

$$Mox = l + \frac{d_1}{d_1 + d_2}.a$$

$$= 14 + \frac{15}{15 + 20}.2$$

$$Mox = 14.85 \times 10^6$$

b: حالة عدم تساوي طول الفئات :

| Xi الأجر $10^3$DA | $\%f_i$ | $ai$ | $\frac{f_i}{ai}$ |
|---|---|---|---|
| ]20-15 ] | 10 | 5 | 2 |
| ]35-20 ] | 25 | 5 | 3 |
| ]37-35 ] | 40 | 12 | 3.33 |
| ]50-37 ] | 20 | 13 | 1.53 |
| ]60-50] | 15 | 10 | 1.5 |
| ∑ | 100 | / | / |

الفئة المنوالية هي الفئة[25−37]

$$Mox = l + \frac{d_1}{d_1 + d_2} . a$$

$$= 25 + \frac{0.33}{0.33 + 1.8} . 12$$

$$= 26.85 \times 10^3 \, DA$$

2- **الوسط الحسابي** : هو يمثل مجموعة قيم مفردات المجموعة على عددها .

I / **الوسط الحسابي البسيط** : يستخدم في حالة البيانات غير المبوبة

مثال : إذا كانت أوزان مجموعة طلبة على التوالي :

65,67,69,71,75,kg

فإن الحسابي لأوزانهم :

$$\bar{x} = \frac{65 + 67 + 69 + 71 + 75}{5}$$

$$\bar{x} = 69{,}4kg$$

أي أن: $\bar{x} = \frac{\varepsilon x}{N}$

**II / الوسط الحسابي المرجح**: ادخل الترجيح في علاقة الوسط الحسابي في نظرا لاختلاف أهمية قياسات المتغير الإحصائي من قيمة لأخرى ، والترجيح له أهمية ، ووزن قياس معين مكن قياسات المتغير الإحصائي ويعطي بالعلاقة :

$$\bar{x} = \frac{\varepsilon x_i \, x_i}{N}$$

**1- حالة X منقطع**

**أ/ الطريقة المباشرة :**

مثال :

| $x_i$ | $n_i$ | $n_i\ x_i$ |
|---|---|---|
| 0 | 10 | 0 |
| 1 | 15 | 15 |
| 2 | 30 | 60 |
| 3 | 20 | 60 |
| 4 | 5 | 20 |
| ∑ | 80 | 155 |

$$\bar{x} = \frac{\varepsilon x_i\ x_i}{N} = \frac{155}{80} = 1.937$$

**ب/ طريقة الوسط الفرضي: (الطريقة المختصرة ) :**

**مثال**

| $e_i$ | $n_i$ | ai | $n_i y_i$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 10 | -2 | -20 |
| 1 | 15 | -1 | -15 |
| 2 | 30 | 0 | 0 |
| 3 | 20 | 1 | 20 |
| 4 | 5 | 2 | 10 |
| 3 | 80 | / | -5 |

A : قيمة في منتصف المجموعة تمثل منوال X

حيث $Y_I = X_I - 2$ , A =2

$$\bar{Y} = \frac{\varepsilon n_i\ Y_i}{N} = \frac{-5}{80} = -0.0625$$

$$\bar{Y} = \bar{X} - A$$

$$\bar{Y} = \bar{X} - A = -0.0625 + 2 = 1.9375$$

2- **حالة X مستمر** : تعطي عبارة الوسط الحسابي في حالة بالعلاقة :

$$\bar{x} = \frac{\varepsilon n_i\ c_i}{N}$$

## أ- الطريقة المباشرة :

| $ni\ ci$ | $ci$ | $n_i$ | $10^3$DA الأجر Xi |
|---|---|---|---|
| 128 | 16 | 8 | ]17-15 ] |
| 190 | 19 | 10 | ] 21-17 ] |
| 384 | 24 | 16 | ]27-21 ] |
| 484 | 31 | 14 | ]35-27 ] |
| 280 | 40 | 7 | [45-35] |
| 1416 | / | 55 | ∑ |

| $ni\ zi$ | $z_i = \frac{ci-16}{2}$ | $\frac{n_i}{ai}$ | ai |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 4 | 2 |
| 15 | 1.5 | 2.5 | 4 |
| 64 | 4 | 2.66 | 6 |
| 105 | 7.5 | 1.75 | 8 |
| 84 | 12 | 0.7 | 10 |
| 268 | / | / | / |

$$\bar{x} = \frac{\varepsilon x_i\, x_i}{N} = \frac{1416}{55} = 5.74.10^3\ DA$$

## ب/ الطريقة المختصرة : (الطريقة البسيطة ) :

$$z_i = \frac{c_i - b}{a}$$

ci : تمثل مراكز الفئات.

a: مدى الفئات ( في حالة تساوي مدى الفئات ،وفي حالة اختلاف مدى الفئات التي تأخذ المدى الأكثر تكرار ) .

b: يمثل مركز الفئة المنوالية .

$$\bar{Z} = \frac{\varepsilon x_i\, Y_i}{N} = \frac{268}{55} = 4.87$$

$$\bar{Z} = \frac{\bar{X} - b}{a} \Rightarrow \bar{X} = a\bar{Z} + b$$

$$\bar{x} = 2(4.87) + 16$$

$$\bar{x} = 25.74 \times 10^3 DA$$

## خصائص الوسط الحسابي :

1- يستعمل الوسط الحسابي في المتغيرات الكمية ، أي القابلة للقياس

2- لا يمكن أن يكون أكثر من وسط حسابي لأي توزيع تكراري ،ولا يمكن أن يكون قيمة مشاهدة إلا نادرا

3- الوسط الحسابي هو متوسط لقيم المجموعة متوسط لمراتب المجموعة

4- مجموع انحرافات قيم المتغير الإحصائي عن وسطها الحسابي ويساوي الصفر ( أي أن الوسط الحسابي يتأثر المتطرقة ) .

| $n(x_i\bar{X})$ | $ni\ Xi$ | $n_i$ | $X_i$ |
|---|---|---|---|
| -4.4 | 0 | 2 | 0 |
| -4.8 | 4 | 4 | 1 |
| -1.2 | 12 | 6 | 2 |
| 3.2 | 12 | 4 | 3 |
| 7.2 | 16 | 4 | 4 |
| 0 | 44 | 20 | |

- $\varepsilon n_i\ (x_i - \bar{x})$=
  $\varepsilon n_i\ x_i - N\bar{x} = N\bar{x} - N\bar{x} = 0/\bar{x} = \frac{\varepsilon n_i\ x_i}{N} \Longrightarrow \varepsilon n_i\ x_i = N\bar{x}$
- $\varepsilon(x_i - \bar{x})$= $\varepsilon n_i - N\bar{x} = N\bar{x} - N\bar{x} = 0/\bar{x} = \frac{\varepsilon x_i}{N} \Longrightarrow \varepsilon x_i = N\bar{x}$

5- لا يمكن حساب الوسط الحسابي في الجداول التكرارية المفتوحة إلا بالطريقة غير مباشرة أي باستخدام العلاقة التجريبية بين الوسط والوسيط والمنوال :

$$\bar{x} - Mox = 3(\bar{x} - Mex)$$

**الوسيط** : هو القسيمة التي تقع في منتصف البيانات المرتبة ترتيبا تصاعديا أو تنازليا .

**I / حالة البيانات غير المبوبة :**

*عدد المفردات فردي : 170,173,160,178,155

رتبة الوسيط هي $\frac{N+1}{2} = \frac{5+1}{2}$=3

بعد ترتيب المفردات :155,160,170 ;173,178

Mex=170

- عدد المفردات زوجي : 70,70,78 ; 70,67,78

رتبة الوسيط : $\frac{N+1}{2} = \frac{6+1}{N} = 3,5$

$$65,67,67,70,70,78$$

$$Mex = \frac{67+70}{2} = 68.5$$

II / **حالة البيانات المبوبة** : هي قيمة x التي تقسم المجموعة إلى قسمين متساويين

**X متقطع: لحساب الوسيط .**

-حساب $fc \nearrow$

- حساب $\frac{n}{2}$ واستخراج قيمة Mex

**ملاحظة :**

- إذا كانت قيمة $\frac{n}{2}$ تقع مات بين $fc \nearrow$ فإن قيمة الوسيط تكون معينة
- إذا كانت قيمة $\frac{n}{2}$ تساوي أحد قيم $fc \nearrow$ فإن قيمة الوسيط تكون مجال .

مثال :

| $X_i$ | $n_i$ |
|---|---|
| 0 | 6 |
| 1 | 15 |
| 2 | 25 |
| 3 | 10 |
| 4 | 4 |
| $\sum$ | 20 |

$Mex = 3$

| $X_i$ | $fc \nearrow$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| | 6 |
| 2 | |
| | 21 |
| 3 | |
| | 46 |
| 4 | |
| | 56 |
| 5 | |
| | 60 |
| 6 | |
| | - |

$\frac{N}{2} = 30$

| $n_i$ | $X_i$ |
|---|---|
| 10 | 1 |
| 15 | 2 |
| 25 | 3 |
| 30 | 4 |
| 20 | 5 |
| 20 | $\sum$ |

| $fc \nearrow$ | $X_i$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 10 | |
| | 2 |
| 25 | |
| | 3 |
| $\frac{N}{2} = 30 \rightarrow$ 50 | |
| | 4 |
| 80 | |
| | 5 |
| 100 | |
| | 6 |
| - | |

$Mex = [3,4]$

***حالة x مستمر:**

مثال:

$\frac{N}{2} = 50$: رتبة الوسيط

| $n_i$ | $X_i$ |
|---|---|
| 10 | ]4-2] |
| 15 | ]6-4] |
| 25 | ]10-6] |
| 20 | ]14-10] |
| 10 | ]20-14] |
| 4 | [30-20] |
| 80 | $\sum$ |

| $fc \searrow$ | $fc \nearrow$ | $c$ |
|---|---|---|
| 80 | 0 | 2 |
| 74 | 6 | 4 |
| $\frac{N}{2} \rightarrow$ $fcj$59 | $fcj$21 | 6ej |
| $fcj_{+1}$34 | $fcj_{+1}$46 | $10ej_{+1}$ |
| 14 | 66 | 14 |
| 4 | 76 | 20 |
| 0 | 80 | 30 |

$$Mex = e_j + \frac{e_{j_{+1}} - e_j}{fj_{+1} - fcj}\left(\frac{N}{2} - fcj\right)$$

$$Mex = 6 + \frac{10-6}{46-21}(40-21)$$

$$Me_i x = 9.04$$

*يمكن أيضا حساب الوسيط باستعمال التكرار المجتمع النازل

القانون هو :

$$Me_ix = e_{j_{+1}} + \frac{e_{j_{+1}} - e_j}{fcj - fj_{+1}}\left(fcj_{+1} \searrow - \frac{N}{2}\right)$$

$$=10 + \frac{10-6}{54-34}(34 - 40) = 9.04$$

**خصائص الوسيط :**

-يقسم المجموعة إلى قسمين متساويين

-لا يتأثر بالقيم المتطرفة ( الحدية كما في حالة الوسيط الحسابي )

-يستعمل الوسيط في عدة مجالات نذكر منها : الأجور والأسعار ، .....الخ

**المقاييس الشبيهة بالوسيط ( مقاييس الموضع )**

**حالة البيانات غير المبوبة :**

مثال : لتكن القيم التالية : 2,3,4,5,6,7,8

**الربيعيات :**

$$Q_1 = \frac{N+1}{4} = \frac{7+1}{4} = \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow Q_1 + 3غ$$

25% لديهم اقل من 3غ

75% لديهم أكثر من 3غ

$$Q_2 = \frac{N+1}{2} = \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow Q_2 = 5$$

50% لديهم اقل من 5 غ

50% لديهم أكثر من 5غ

$$Q_3 = \frac{3(N+1)}{4} = \frac{3(8)}{4} = \frac{24}{4} = 6 \Rightarrow Q_3 = 7$$

75% لديهم أقل من 7غ

25% لديهم أكثر من 7غ

**العشيريات :**

$$\frac{N+1}{10} = \frac{8}{10} = 1 \Rightarrow D_1 = 2$$

$$\frac{5(N+1)}{10} = \frac{5(8)}{10} = 4 \Rightarrow D_5 = 5\text{غ}$$

$$\frac{9(N+1)}{10} = \frac{9(8)}{10} = \frac{72}{10} = 7 \Rightarrow D_9 = 8$$

**المئينات**

$$\frac{10(N+1)}{100} = \frac{10(8)}{100} = 1 \Rightarrow P_{10} = 2$$

$$\frac{50(N+1)}{100} = \frac{50(8)}{100} = 4 \Rightarrow P_{50} = 5$$

$$\frac{70(N+1)}{100} = \frac{70(8)}{100} = \frac{560}{100} = 5.6 \Rightarrow P_{70} = \frac{6+7}{2} = 6.5$$

**حالة البيانات المبوبة :**

1- **حالة X متقطع** : تعالج هذه الحالة بنفس الطريقة المتبعة في حساب الوسيط ( في حالة X متقطع ) يفارق وحيد هو استبدال رتبة الوسيط برتبة الربيع او العشير او المئين الموافق .

مثال :

| $X_i$ | $n_i$ |
|---|---|
| 0 | 2 |
| 1 | 4 |
| 2 | 6 |
| 3 | 5 |
| 4 | 3 |
| $\sum$ | 20 |

| $X_i$ | $fc \nearrow$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 2 |
| 2 | 6 |
| 3 | 12 |
| 4 | 17 |
| 5 | 20 |
| | - |

$\frac{N}{4}$ → 2

$\frac{N}{2}$ → 6

$\frac{3N}{4}$ → 12

**الربيعيات :**

$$\frac{N}{4} = 5 \Rightarrow Q_1 = 1$$

$$\frac{N}{2} = 10 \Rightarrow Q_2 = 2$$

$$\frac{3N}{4} = 15 \Rightarrow Q_3 = 3$$

**العشيريات :**

$$\frac{N}{10} = 2 \Rightarrow D_1 \in [0 - 1]$$

$$\frac{2N}{10} = 4 \Rightarrow D_2 = 1$$

$$\frac{9N}{10} = 18 \Rightarrow D_9 = 4$$

**المئينات :**

$$\frac{10N}{100} = 2 \Rightarrow P_{10} \in [0-1]$$
$$\frac{50N}{100} = 10 \Rightarrow P_{50} = 2$$
$$\frac{80N}{100} = 16 \Rightarrow P_{80} = 3$$

**حالة X مستمر** : نستخدم العلاقة المبرهن عليها في حساب الوسيط مع استبدال رتبة الوسيط برتبة الربيع أو العشير أو المئين الموافق .

**الربيعيات :**

**مثال :**

$$\frac{N}{4} = \frac{80}{4} = 20 \Rightarrow Q_1$$
$$= 110 + \frac{120-110}{30-14}(20-14) + 113{,}75 \times 10^6 DA$$

**العشيريات :**

**مثال**

$$\frac{N}{10} = 8 \Rightarrow D_1 = 100 + \frac{110-100}{14-5}(8-5) + 103{,}33 \times 10^6 DA$$

**المئينات :**

$$\frac{80N}{100} = \frac{80(80)}{100} = 64 \Rightarrow p_{80} = 130 + \frac{140-130}{68+55}(64-55)$$
$$= 130 \times \frac{10}{13}(9) = 136{,}92$$

**1- الوسط الهندسي:**

**حالة البيانات غير المبوبة:** $logG = \frac{\varepsilon log x_i}{N}$

**مثال:** $N = 8$ 7,8,9,10,10,11,12,13

$$logG = \frac{1}{8}[log7 + log8 + log9 + log10 + log10 + log11 + log12 + log13]$$

$$= \frac{7,93694782}{8} = 0,992 \Rightarrow G = 9,82$$

**حالة بيانات مبوبة :**

$$logG = \frac{\varepsilon n_i log x_i}{N}$$

**مثال:**

| $x_i$ | $n_i$ | $n_i x_i$ | $log x_i$ | $n_i log x_i$ | $\frac{n_i}{x_i}$ | $x_i^2$ | $n_i x_i^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 6 | 0 | 0 | 6 | 1 | 6 |
| 2 | 15 | 30 | 0.30 | 4.51 | 7.5 | 4 | 60 |
| 3 | 10 | 30 | 0.47 | 4.77 | 3.33 | 9 | 90 |
| 4 | 4 | 16 | 0.60 | 2.404. | 1 | 16 | 64 |
| ∑ | 35 | 82 | / | 11.69 | 17,833 | / | 220 |

$logG = \frac{11,69}{35}$ =0,33⇒G=2 ,15

ملاحظة يتم حساب الوسط الهندسي في حالة x مستتمر بنفس الطريقة مع استبدال $x_i$ بمراكز الفئات $c_i$

**2- الوسط التوافقي :**

حالة البيانات المبوبة : $H = \frac{N}{\varepsilon \frac{n_i}{x_i}}$ حالة البيانات غير المبوبة $H = \frac{N}{\varepsilon \frac{1}{x_i}}$

$$H = \frac{35}{17,833} = 1,96 \qquad H = \frac{8}{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}} = 9,63$$

**3- الوسيط التربيعي :**

حالة البيانات غير المبوبة حالة البيانات المبوبة

$$Q = \sqrt{\frac{n_i x_i}{N}} = \sqrt{\frac{220}{35}} \qquad Q = \sqrt{\frac{\varepsilon x_i^2}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{828}{8}} = 10{,}17 Q = 2{,}5$$

بصفة عامة دوما $Q > \bar{x} > G > H$

**كيفية اختبار مقاييس النزعة المركزية :**

**الوسيط :** يستعمل بحالة التوزيعات التكرارية المفتوحة

في حالة الأجور التي تنقسم المجتمع إلى قسمين

**المنوال :** عند إنتاج الأحذية فالمنتج يقوم لإنتاج القياس الأكثر استعمالا أو أثناء الانتخابات لمعرفة بالأغلبية .

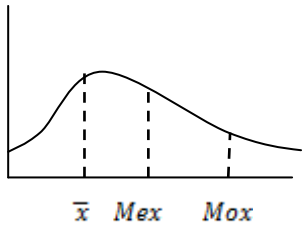
**الوسط الحسابي :**

عند استيراد أو إنتاج مادة استهلاكية أساسية ببحث عن متوسط الكمية المستوردة أو المنتجة $(\bar{x})$

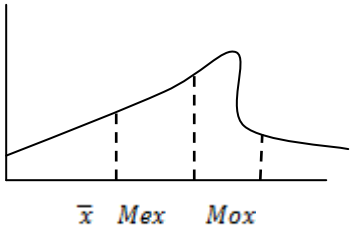
والعلاقة بين الوسيط الحالي الوسيط المنوال :

1) $\bar{x} = Mex = Mox$ ← التوزيع التكراري يكون متماثل ( متناظر )

2) $\bar{x} > Mex > Mox$ ←: موجب الالتواء ( غير متناظر من اليمين ) ( مائل إلى اليمين )



3) $\bar{x} < Mex < Mox$ ← سالب الالتواء ( غير متناظر من اليسار) (مائل إلى اليسار)



تبين مقاييس النزعة المركزية القيمة المتوسطة للتوزيع الإحصائي ، دون أن تظهر كيفية توزيع او انتشار قيم المتغير الإحصائي حول هذه القيمة ، هذا ما يؤدي بنا إلى التطرف لمقياس التشتت .

**تعريف التشتت :** يقصد بالتشتت مدى تباعد قيم المتغير الإحصائي عن بعضها البعض أو عن القيمة المركزية ،وهي بذلك تعطي لنا فكرة ، عن مدى تجانس أو تباين القيم .

**أهمية التشتت:** يمكن أن تساوي متوسطات الأكثر من مجموعة بالتالي يمكن القول بأنها متشابهة ( عند مقارنتها بمقياس النزعة المركزية ) ، لكنها نجدها مختلفة كغير ( عند مقارنتها بمقياس التشتت ) .

| $n_i x_i$ | $n_i$ | $x_i$ |
|---|---|---|
| 778 | 1 | 78 |
| 758 | 2 | 79 |
| 240 | 3 | 80 |
| 162 | 2 | 81 |
| 82 | 1 | 82 |
| 720 | 9 | ∑ |

| $fc \nearrow$ | $X_i$ |
|---|---|
| 0 | 78 |
| 1 | |
| | 79 |
| 3 | |
| | 80 |
| 6 | |
| | 81 |
| 8 | |
| | 82 |
| 9 | |
| | 83 |
| - | |

$$\bar{x} = \frac{\varepsilon n_i x_i}{N} = \frac{720}{9} = 80$$

$$Mox = 80$$

$$\frac{N}{2} = 4{,}5 \Rightarrow Mex = 80$$

| $n_i y_i$ | $n_i$ | $y_i$ |
|---|---|---|
| 40 | 1 | 40 |
| 120 | 2 | 60 |
| 240 | 3 | 80 |
| 200 | 2 | 100 |
| 120 | 1 | 120 |
| 720 | 9 | 3 |

| $fc \nearrow$ | $X_i$ |
|---|---|
| 0 | 40 |
| 1 | |
| | 60 |
| 3 | |
| | 80 |
| 6 | |
| | 100 |
| 8 | |
| | 120 |
| 9 | |
| | 140 |
| - | |

$$\bar{y} = \frac{\varepsilon n_i x_i}{N} = \frac{720}{9} = 80$$

$$Mox = 80$$

$$\frac{N}{2} = 4{,}5 \Rightarrow Mex = 80$$

بالمقارنة باستخدام النزعة المركزية نلاحظ أي التوزيعين متشابهين ،ولم استخدامها مقاييس التشتت نجد ( المدى العام ) .

$$e_x = x_n - x_o = 82 - 78 = 4$$

$$e_y = y_n - y_o = 120 - 40 = 80$$

**أنواع مقايس التشنت :**

**مقاييس التشتت المطلقة:** و هي المقاييس التي تقيس مقدار التشتت حول القيمة المركزية للظواهر التي لها نفس وحدة القياس ( الأجور ) ( الساحة )

**مقاييس التشتت النسبية :** وهي المقاييس التي تقيم مقدار التشتت حول القيمة المركزية للظواهر إلي لها وحدات قياس مختلفة .

**1- مقاييس التشتت المطلقة :**

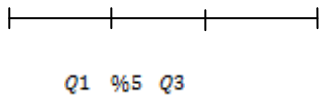
**المدى العام** : الفرق بين اكبر قيمة واصفر قيمة :

$$e = x_n - x_o$$

**خواصه** :

- يستعمل الإعطاء فكرة سريعة مدى تقارب أو تباعد المفردات
- يستعمل للمقارنة بين توزيعين إحصائيين أو أكثر .
- لا يمكن حساب المدى بدقة في حالة التوزيعات الإحصائية المفتوحة من الطرفين .
- بسيط وسهل الحساب .
- **المجال الربيعي** : وهو عبارة عن الفرق بين الربيع الثالث والأول

$$IQ = Q3 - Q1$$




**الخواص** :

- يضع 50% من الوحدات الإحصائية
- يستعمل للمقارنة بين توزيعين إحصائيين أو أكثر
- استعمالاته محدود لكنه أفضل من المدى العام

1- **الانحراف الربيعي** : ( نصف المجال الربيعي ) : $EI = \frac{IQ}{2} + \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

مثال : السلسة الآتية توضح مداخيل 11فرد × $10^2$ دج

700 ,800,900,900,1000,1100,1200,1300,1300,1400

e=1400-700=700×$10^2$DA

$$-\frac{N+1}{4} = \frac{12}{4} = 3 \Rightarrow Q_1 = 900 \times 10^2 DA$$

$$-\frac{N+1}{4} = \frac{12}{4} = 6 \Rightarrow Q_2 = 900 \times 10^2 DA$$

$$-\frac{3(N+1)}{4} = \frac{36}{4} = 9 \Rightarrow Q_3 = 1300 \times 10^2 DA$$

$$IQ = 1300 - 900 = 400 \times 10^2 DA$$

$$EI = \frac{IQ}{2} = \frac{400}{2} = 6 \Rightarrow Q_2 = 900 \times 10^2 DA$$

**مدلول هذه النتيجة :**

1) 50%من القيم تقع في منتصف تساوي $10^2 \times 400$دج

2) 50% من القيم التي تبعد في المتوسط عن الوسيط هي : $10^2 \times 200$دج

4- **النسبة بين المجال الربيعي والمدى العام** : يبين المقياس تشتت 50% من الوحدات حول الوسيط مقارنة بالمدى العام .

يتميز بـ : $R = \frac{Q_3 - Q_1}{e} \times 100$

يستعمل لمقياس تشتت 50% من الوحدات التي تقع حول القيمة المركزية لنفس التوزيع .

- إذا كان R=50% يكون التوزيع متناظر
- إذا كان R>50% يكون التشتت قوي بالنسبة للقيمة المركزية
- إذا كان R<50%يكون التشتت ضعيف بالنسبة للقيمة المركزية

$$R = \frac{Q_3 - Q_1}{e} \times 100 \frac{400}{700} = 57{,}14\%$$

نلاحظ أن المجال الربيعي يمثل $57{,}14\%$ من المدى العام

إذن يوجد تشتت نسبي والتوزيع قريب من التماثل

5- **الانحراف المتوسط المطلق** : هو البعد المتوسط لقيم المتغير الإحصائي عن وسطها الحسابي أو أية قيمة مركزية ويعطي بالعبارة .

$$eH(x) = \frac{\varepsilon n_i |x_i - a|}{N}$$

a : قد تساوي إلى $\bar{x}$ او Mex أو Mox

مثال: نقاط طالب :

1,2,4,5,8,9,10,11,13/N=9

$$=7\bar{x} = \frac{\varepsilon x_i}{N} = \frac{63}{9}$$

$$eH(\bar{x}) = \frac{\varepsilon |x_i - \bar{x}|}{N} = \frac{32}{9} = 3.55$$

تبعد قيم $x_i$ في المتوسط

عن وسطها الحسابي بـ :3,55

**خواصه :**

– يأخذ بعين الاعتبار جميع المفردات ، كما إن قيمته تأخذ في الصفر كلما كبر حجم العينية .

– يعتبر الانحراف المتوسط المطلق أحسن من سابقية (المدى العام ، المجال الرئيسي الانحراف الربيعي ) إلا انه لا يستعمل على نطاق واسع نظرا لوجود القيمة المطلقة .

6– **التباين والانحراف المعياري** : يعتبر الانحراف $G(x)$ من اهم مقاييس التشتت والأساليب الرياضية الحديثة لقياس التشتت وأكثر استعمالا .

– **العبارة الأولى للتباين :**

$$v(x) = \frac{\varepsilon n_i (x_i - \bar{x})^2}{N} \quad , G(x) = \sqrt{v(x)}$$

$$=\frac{\varepsilon n_i}{N}(x_i^2 - 2\bar{x}x_i + \bar{x}^2)$$

$$2\bar{x}\frac{\varepsilon n_i x_i}{N} + \frac{N \times \bar{x}^2}{N} = \frac{\varepsilon n_i x_i^2}{N} -$$

$$=\overline{x^2} - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2$$

$$-\left[\frac{\varepsilon n_i x_i}{N}\right]^2 v(x) = \overline{x^2} - \bar{x}^2 \quad = \frac{\varepsilon n_i x_i^2}{N}$$

*كلما كان $G(\times)$ صغيرا كلما دل ذلك على ان القيم ليست متباعدة عن وسطها الحسابي وبالتالي فهي اقل تشتتا ووسطها الحسابي يمثلها تمثيلا جيدا .

**خصائص الانحراف المعياري :**

– الانحراف المعياري لقيمة ثابتة يساوي الصفر $v(a) = o \Rightarrow G(a) = o$

***تبسيط حساب التباين : حالة × متقطع**

$$v(y) = (x_i - b) : \begin{matrix} y_i = x_i - b \\ \bar{y} = \bar{x} - b \end{matrix} \qquad )]^2$$

$$= \frac{\varepsilon n_i [x_i - b - \bar{x} - b]^2}{N}$$

$$= \frac{\varepsilon n_i (x_i - \bar{x})^2}{N} = v(x)$$

***حالة × مستمرة :**

$$v(Z) = v\left(\frac{x_i - b}{a}\right) = \frac{\varepsilon n_i \left[\left(\frac{x_i - b}{a}\right) - \left(\frac{\bar{x} - b}{a}\right)\right]^2}{N}$$

$$= \frac{\frac{\varepsilon n_i}{a^2}(x_i - \bar{x})^2}{\frac{N}{1}} = \frac{1}{N} \cdot \frac{\varepsilon n_i}{a^2}(x_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[\frac{\varepsilon n_i (x_i - \bar{x})^2}{N}\right]$$

$$= \frac{1}{a^2}\left(v(x)\right)$$

$$v(Z) = \frac{v(x)}{a^2} \Rightarrow v(x) = a^2 v(z)$$

يستخدم( ×) G في تحديد عدد الوحدات الإحصائية بالنسبة لتوزيع إحصائي قريب من التماثل حسب الحلات الآتية حيث نجد أن :

- المجال $[\bar{x} \mp 0.67G(x)]$ يحتوي على 50% من المجتمع
- المجال $[\bar{x} \mp G(x)]$ يحتوي على من 68,27% المجتمع
- المجال $[\bar{x} \mp 2G(x)]$ يحتوي على من95,45% المجتمع
- المجال $[\bar{x} \mp 3G(x)]$ يحتوي على من99,73% المجتمع

**العلاقة بين الانحراف المعياري والمجال الربيعي :**

$[\bar{x} \mp 0.67G(x)]$, $[Q_1 - Q_3]$ يضم 50% من التوزيع الإحصائي.

$$Q_1 = \bar{x} - 0.67G(x)$$

$$Q_3 = \bar{x} + 0.67G(x)$$

$$Q_1 - Q_3 = 1{,}34G(x)$$

العلاقة بين الانحراف المعياري والانحراف المتوسط المطلق :

$$\begin{cases} eM(x) = \frac{4}{5}G(x) \\ EI = \frac{2}{3}G(x) \end{cases}$$

**ثانيا : مقايس التشتت النسبي :**

1- **معامل الإختلاف** : CV هو حامل قسمة الانحراف المعياري للقيم على متوسطها الحسابي ويعطي بالعلاقة :

$$cv_x = \frac{G(x)}{\bar{x}} \times 100$$

كلما كان CV كبير كلما دل ذلك على قوة التشتت بين مفردات الظاهرة ،ولما كان صغير كلما دل ذلك على تجانس مفردات الظاهرة .

ملاحظة : تستعمل العلاقة $v_x = \frac{G(x)}{\bar{x}} \times 100$ في حالة التوزيعات الإحصائية المغلقة من الجهتين:

*أما في حالة توزيع مفتوح فإن عبارة معامل الاختلاف تعطي بالعبارة ،

$$cv = \frac{Q_1 - Q_3}{Q_3 + Q_1} \times 100$$

كما يستعمل معامل الاختلاف في تحديد التوزيع المثل ، وبالتالي النوع الأفضل .

**2-المعامل الربيعي النسبي** : $CQ$ : يعطي بالعلاقة : $CQ = \frac{Q_1 - Q_3}{Q_2} \times 100$

يستخدم لمقرنة تشتت 50% من الوحدات الإحصائية التي تقع في منتصف التوزيع بالنسبة للوسيط .

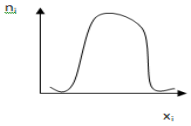
**مقايس الشكل :**

1- **التماثل ( التناظر )** : يتم قياس درجة التماثل بواسطة معامل فيشر الأول

$$F_1 = \frac{u_3(x)}{G(x)^3} = \frac{\text{العزم المركزي من الدرجة3ل}x}{\text{الانحراف المعياري قوة3}}$$

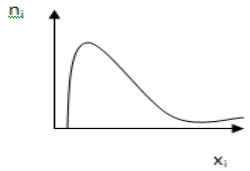
**ملاحظة** : اعتمد فيشر العزم المركزي من الدرجة 3 لأن قيمته في حالة التوزيع التناظري تساوي إلى الصفر ونميز ثلاث حالات :

-الحالة الأولى : $F_1$=0وهي حالة توزيع تناظري حيث : $\bar{x} = Mex = Mex$



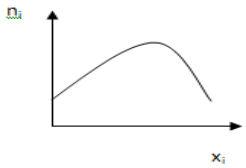
-الحالة الثانية : $F_1$>0وهي حالة توزيع موجب الالتواء ( مائل إلى اليمين ) حيث :

$$\bar{x} > Mex > Mex$$




الحالة الثالثة : $F_1$ 0> وهي حالة توزيع سالب الالتواء ( مائل إلى اليسار ) حيث :

$$\bar{x} < Mex < Mex$$




ملاحظة : في حالة التوزيعات الإحصائية المفتوحة يستعمل معامل يول كندال الذي يعطي بالعلاقة :

$$c_{yk} = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{(Q_3 - Q_1)}$$

حيث نجد :

حالة توزيع تناظري $c_{yk} = 0$

حالة توزيع غير تناظري ( مائل لليمين ). $c_{yk} > 0$

حالة توزيع غير تناظري ( مائل لليسار ) .$c_{yk} < 0$

2- **التفلطح** : يتم تحديد مدى تفلطح التوزيعات الإحصائية مقارنة بتوزيع طبيعي،وذلك باستخدام معامل فيشر الثاني الذي يعطي بالعلاقة :

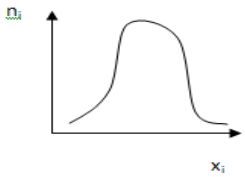
3- $F_2 = \frac{u_4(x)}{G(x)^4} - 3 = 3 - \frac{\text{العزم المركزي من الدرجة 4 لـ } x}{\text{الانحراف المعياري } 4}$

4- $M_4(x) = \frac{\varepsilon n_i (x_i - \bar{x})^4}{N}$ : حيث

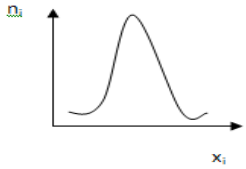
**ملاحظة :**

اعتمد فيشر على العزم المركزي من الدرجة 4 لـ $x$ لأن المقدار $\frac{u_4(x)}{G(x)^4}$ يساوي إلى 3 في حالة توزيع طبيعي تميز ثلاث حالات

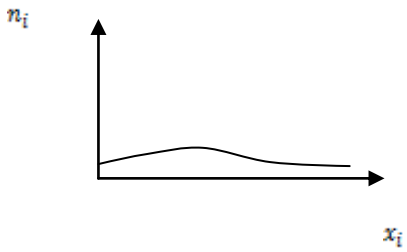
الحالة الأولى : $F_2 = 0$ وهي حالة توزيع طبيعي




الحالة الثانية: $F_2 > 0$ وهي حالة توزيع متطاول ( تشتت ضعيف بالنسبة لمركز التوزيع )




الحالة الثالثة : $F_2 < 0$ وهي حالة توزيع مفلطح (تشتت قوي بالنسبة لمركز التوزيع )



يعتبر الإحصاء مجوعة من الطرق العلمية والأدوات الفنية التي تستخدم في جمع وعرض وتحليل وتفسير البيانات العديدة ، باستخدام مقاييس النزعة المركزية والتشتت ومقاييس الشكل والتمركز ، فالهدف بطبيعة الحال هو دراسة ظاهرة واحدة (متغير واحد ) كأجور العمال ، نقاط الطلبة ، ....الخ ، أما إذا كانت البيانات العددية تتعلق بسلوك ظاهرتين (متغيرين ) كدخول الأفراد ونفقاتهم ، الكتلة النقدية والتضخم ...الخ.

فالهدف هو ترجمة العلاقة التي توجد بين المتغيرين إلى علاقة رياضية .

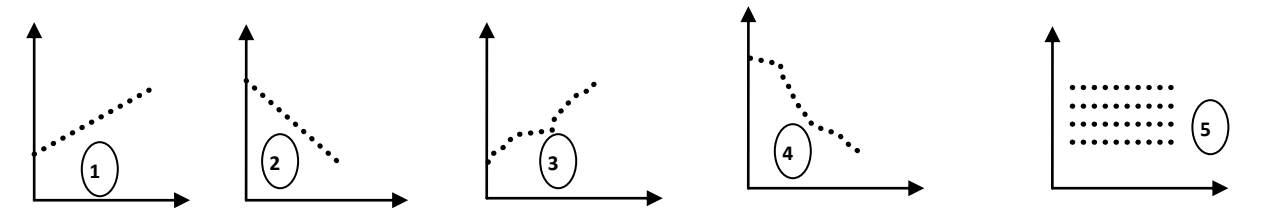
- لتحديد نوع العلاقة الموجودة بين المتغيرين (فردية / عكسية ) وهذا ما يصطلح عليه بالانحدار .

- ولمعرفة قوة العلاقة بين المتغيرين وهذا ما يصطلح عليه بالارتباط

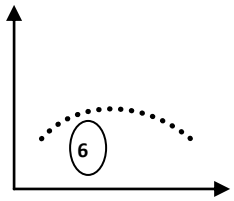
I / **الانحدار** : يهتم بقياس العلاقة الرياضية بين المتغير y التابع والمتغير x المستقل ، أي التنبؤ بقيمة y بمعلومية قيمة x

**1-العلاقة الموجودة بين المتغير التابع والمتغير المستقل ، (الشكل الانتشار )**

يمكن أن نصادف عدة أنواع من أشكال الانتشار كل نوع يحدد طبيعة العلاقة بين x و y ،وبالتالي يحدد طبيعة الانحدار بينهما :




انحدار خطي موجب تام — انحدار خطي سالب تام — انحدار خطي موجب غير تام — انحدار خطي سالب غير تام — لا توجد أي علاقة خطيةبين xوy




انحدار غير خطي بين x و y

(1) (2) نادرا ما تصادفها في الظواهر الاقتصادية والاجتماعي

(3) (4) كثيرا ما نصادفها في الظواهر الاقتصادية والاجتماعية

2-طريقة تحديد العلاقة الخطية البسيطة : إذا كانت نقاط الانتشار الممثلة في معلم متعامد ومتجانس ليست على استقامة واحدة ، لكن اتجاهها يمكن تقريبة في معادلة خط المستقيم من الشكل ، $y_i$ , $bx_i$ ,+a وقعيا لا يمكن الحصول على قيم الفعلية لكل من a و b ، لكن يمكننا الحصول على قيم تقديرية ل : a وb نرمزلها بـ،$\hat{a}$ و $\hat{b}$ بالتالي قيمة المتغير y التي سنحصل عليها تقديرية $\hat{y}_i = \hat{a} + x_i\,\hat{b}$ و قد قد تختلف عن القيم الفعلية (الحقيقية $x_i$ و $y_i$ المجودة في الجدول) ،ولمعرفة قيمة المعاملات$\hat{a}$ و $\hat{b}$ نستخدم طريقة المربعات الصغرى .

3-**طريقة المربعات الصغرى** : يتمثل مبدأ طريقة المربعات الصغرى في تقدير قيمة المعاملات $\hat{a}$ و $\hat{b}$شرط أن يكون $\varepsilon e_i^2$أصغر ما يمكن ، اي $\min\varepsilon e_i^2$ وكي يتحقق هذا الشرط نشتق $\varepsilon e_i^2$ بالنسبة لـ : $\hat{a}$ و $\hat{b}$ ونعدمها .

نأخذ : $S = \varepsilon e_i^2$ ، حيث : $ei$: هي الفرق بين القيم الحقيقية$Y_i$ والقيم المقدرة $\hat{Y}_i$

أي: $e_i = (Y_i - \hat{Y}_i)$:

$$S=\varepsilon e_i^2 = \varepsilon(Y_i - \hat{Y}_i)$$

$$\Rightarrow e_i^2 = (Y_i - (\hat{b}x_i + \hat{a}))^2$$

$$\Rightarrow S = \varepsilon e_i^2 = \varepsilon(Y_i - (\hat{b}x_i + \hat{a}))^2$$

$$\Rightarrow S = \varepsilon\left(Y_i^2 - 2Y_i\left(\hat{b}x_i + \hat{a}\right) + \left(\hat{b}x_i + \hat{a}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow S = \varepsilon\left(Y_i^2 - 2\hat{b}x_i y_i - 2\hat{a}y_i + \hat{b}^2 x_i^2 + \hat{a}^2 + 2\hat{b}\hat{a}x_i\right)$$

$$\Rightarrow S = \varepsilon Y_i^2 - 2\hat{b}\varepsilon x_i y_i - 2\hat{a}\varepsilon y_i + \hat{b}^2\varepsilon x_i^2 + N\hat{a}^2 + 2\hat{a}\hat{b}\varepsilon x_i$$

$$\frac{ds}{d\hat{b}} = 0 \Rightarrow -2\varepsilon x_i Y_i + 2\hat{b}\varepsilon_{xi}^2 + 2\hat{a}\varepsilon x_i = 0$$

$$\Rightarrow -2\left(\varepsilon x_i Y_i - \hat{b}\varepsilon_{xi}^2 - \hat{a}\varepsilon x_i\right) = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon x_i Y_i - \hat{b}\varepsilon x_i^2 - \hat{a}\varepsilon x_i = 0 \ldots\ldots (1)$$

$$\frac{ds}{d\hat{a}} = 0 \Rightarrow -2\varepsilon Y_i + 2N\hat{a} + 2\hat{b}\varepsilon x_i$$

$$\Rightarrow -2(\varepsilon Y_i - N\hat{a} - \hat{b}\varepsilon x_i) = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon Y_i - \hat{b}\varepsilon x_i - N\hat{a} = 0 \quad (2)$$

من (2) نجد : $\Rightarrow \hat{a} = \frac{\varepsilon Y_i - \hat{b}\varepsilon x_i}{N}$

$$\Rightarrow \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$$

نعوض قيمة a في المعادلة (1)

$$\Leftrightarrow \varepsilon x_i y_i - \hat{b}\varepsilon x_i^2 - (\bar{y} - \hat{b}\bar{x})\varepsilon x_i = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon x_i y_i - \hat{b}\varepsilon x_i^2 - \bar{y}\varepsilon x_i + \hat{b}\bar{x}\varepsilon x_i = 0$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon x_i y_i - \bar{Y}\varepsilon x_i = \hat{b}(x_i^2 - \bar{x}\varepsilon x_i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \hat{b} = \frac{\varepsilon x_i y_i - \bar{y}\varepsilon x_i}{\varepsilon x_i^2 - \bar{x}\varepsilon x_i}$$

لدنيا

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{\varepsilon x_i}{N} \Rightarrow \varepsilon x_i = N\bar{x} \\ \text{و} \\ \bar{y} = \frac{\varepsilon Y_i}{N} \Rightarrow \varepsilon Y_i = N\bar{Y} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \hat{b} = \frac{\varepsilon x_i y_i - N\bar{x}\bar{y}}{\varepsilon x_i^2 - \bar{n}\bar{x}^2}$$

$$\Rightarrow \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$$

مثال: الجدول أدناه يمثل العلاقة بين الدخل والاستهلاك لمجموعة من الاسر

| الأسرة | الدخل $10^3$DA | الاستهلاك $10^3$DA | $x_i y_i$ | $x_i^2$ | $(x_i - \bar{x})$ | $(y_i - \bar{y})$ | $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ | $(x_i - \bar{x})^2$ | $y_i^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 14 | 11 | 154 | 196 | -5 | -5 | 27,5 | 25 | 121 |
| 2 | 16 | 14 | 224 | 256 | -3 | -2,5 | 75 | 9 | 196 |
| 3 | 14 | 12 | 168 | 196 | -5 | -4,5 | 22,5 | 25 | 144 |
| 4 | 16 | 13 | 208 | 256 | -3 | -3,5 | 10,5 | 9 | 169 |
| 5 | 20 | 17 | 340 | 400 | 1 | 0,5 | 0,5 | 1 | 289 |
| 6 | 24 | 23 | 552 | 576 | 5 | 6,5 | 32,5 | 25 | 529 |
| 7 | 15 | 15 | 225 | 225 | -4 | -1,5 | 6 | 16 | 225 |
| 8 | 16 | 14 | 224 | 256 | -3 | -2,5 | 7,5 | 9 | 196 |
| 9 | 25 | 21 | 525 | 625 | 6 | 4,5 | 27 | 36 | 441 |
| 10 | 30 | 25 | 750 | 900 | 11 | 8,5 | 93,5 | 121 | 625 |
| Σ | 190 | 165 | 3370 | 3886 | / | / | 235 | 276 | 2935 |

$$\bar{x} = \frac{\varepsilon x_i}{N} = \frac{190}{10} = 19.10^3 DA$$

$$\bar{Y} = \frac{\varepsilon x_i}{N} = \frac{165}{10} = 16.10^3 DA$$

$$\hat{b} = \frac{\varepsilon x_i y_i - N\bar{x}\bar{y}}{\varepsilon x_i^2 - N\bar{x}^2} = \frac{3370 - 10(19)(16,5)}{2886 - 10(19)^2} = 0,85$$

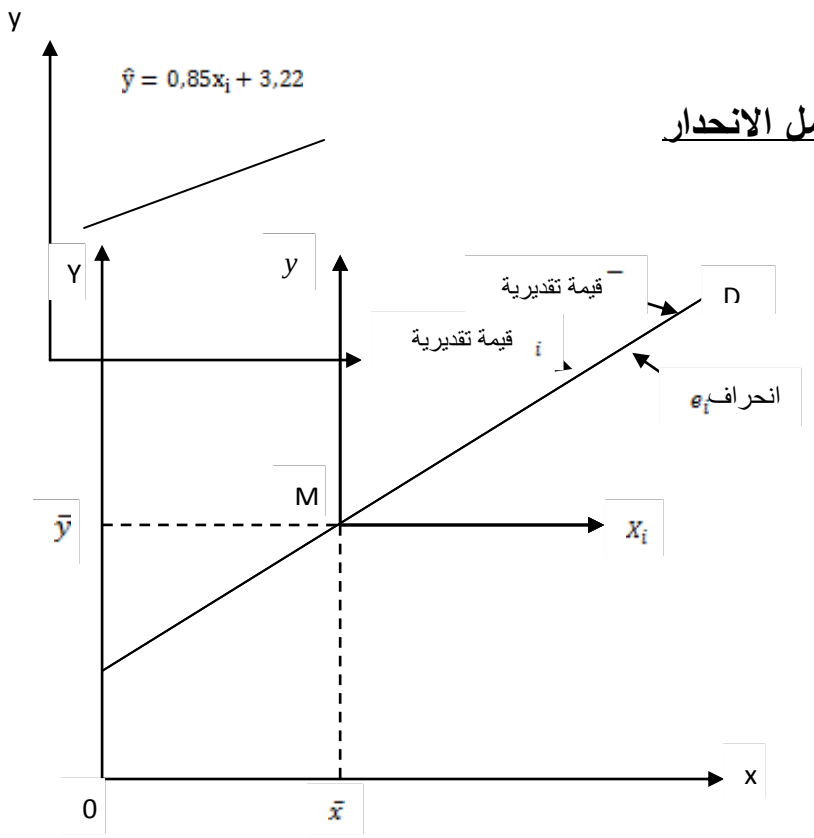
$$\bar{Y} = \hat{b}x + \hat{a} \Rightarrow \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 16,5 - (0,85)(19) = 3,22$$

$$\hat{a} = 3,22$$

إذن معادلة انحدار الاستهلاك على الدخل

$$Dy/x_i \hat{y} = 0,85x_i + 3,22$$

*<u>تبسيط حساب معامل الانحدار</u>




بإمكاننا تبسيط معامل الانحدار عن طريق تغيير نقطة الأصل بمعنى تأخذ

$$\begin{cases} x_i = x_i - \bar{x} \\ y_i = y_i - \bar{y} \end{cases} \text{و} \qquad e_i = y_i - \hat{y}_i \text{(انحراف)}$$

وحتى يكون المستقيم D مستقيما أمثلا يجب أن يمر $M(\bar{x},\bar{y})$ وأن تكون مربعات الفروق بين القيم الفعلية (الحقيقية ) والقيم المقدرة (المحسوبة ) أقل ما يمكن :

*معادلة المستقيم Dy/x بالنسبة النقطة " o" هي $y = \hat{b}x_{i+}\hat{a}$

*معادلة المستقيم Dy/x بالنسبة للنقطة "M" هي $\hat{y}_i = \hat{b}x_i$

$$S = min\varepsilon e_i^{\,2} = \min\varepsilon(y_i - \hat{y}_i)^2 = \min\varepsilon(y_i - \hat{b}x_i)^2$$

$$S = min\varepsilon(y_i^2 + \hat{b}^2\hat{x}_i^{\,2} - 2\hat{b}y_ix_i)$$

$$S = min\left[\varepsilon y_i + \hat{b}^2\varepsilon\hat{x}_i^{\,2} - 2\hat{b}\varepsilon y_ix_i\right]$$

تكون مربعات الفروق بين القيم الفعلية والقيم المقدرة لـ y اصغر ما يمكن إذا وفقط إذا كان المشتق الأول بالنسبة لـ: $\hat{b}$ يساوي الصفر

$$\frac{ds}{d\hat{b}} = 0 \Rightarrow 2\hat{b}\varepsilon x_i^2 - 2\varepsilon y_i x_i = o$$

$$\Rightarrow \hat{b} = \frac{\varepsilon y_i x_i}{\varepsilon x_i^2}$$

$$x_i = x_i - \bar{x}$$

$$y_i = y - \bar{y}$$

$$\Rightarrow \hat{b} = \frac{\varepsilon(y_i - \bar{y})(\hat{x}_i - \bar{x})}{\varepsilon(\hat{x}_i - \bar{x})^2}$$

$$+\hat{a} \Rightarrow \hat{a} \Rightarrow \bar{y} - \hat{b}\bar{x}\bar{y} = \overline{\hat{b}x + \hat{a}} \Rightarrow \bar{y} = \hat{b}\bar{x}$$

**<u>تابع المثال السابق :</u>**

$$\hat{b} = \frac{\varepsilon(x_i - \bar{x})(\hat{x}_i - \bar{x})}{\varepsilon(\hat{x}_i - \bar{x})^2} = \frac{235}{276} = 0{,}85$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 16{,}5 - (0{,}85)(19)$$

$$\hat{a} = 3{,}22$$

$$\frac{Dy}{x} = \hat{y}_i = 0{,}85x_i + 3{,}22$$

بنفس الطريقة يمكن البرهنة على القيم المقدرة لـ : $\bar{\hat{b}}\bar{\hat{a}}$,في حالة انحدار $x$ على y وذلك بقلب المتغيراتxو y في المعلم وبذلك نحصل على مايلي :

$$\hat{b} = \frac{\varepsilon x_i y_i - N\bar{x}\bar{y}}{\varepsilon y_i^2 - N\bar{y}^2} = \frac{\varepsilon(x_i - \bar{x})(\hat{y}_i - \bar{y})}{\varepsilon(\hat{y}_i - \bar{y})^2}$$

$$\bar{\hat{a}} = \bar{x} - \bar{\hat{b}}\bar{y}$$

من المثال السابق

$$\hat{b} = \frac{\varepsilon x_i y_i - N\bar{x}\bar{y}}{\varepsilon y_i^2 - N\bar{y}^2} = \frac{3370 - 10(19)(16,5)}{2935 - 10(16,5)^2} = 1,10$$

$$\hat{a} = \bar{\bar{x}} - \hat{b}\hat{\bar{y}} = 19 - (1,10)(16,5) \Rightarrow \bar{\hat{a}} = 0,75$$

$$\frac{Dx}{y} = \hat{x} = 1,1y_i + 0,75$$

**II / <u>الارتباط الخطي</u>** : يهتم بدراسة قوة العلاقة بين xوy عن طريق حساب معامل الارتباط .

1- **معامل الارتباط الخطي** : رمزه rالذي يمثل الجذر التربيعي الحاصل جداء معاملي معادلتي خطي الانحدار .

- معادلة انحدار yعلى x المتمثلة *Dx/y*: $\hat{y} = \bar{\hat{b}}x_i + \hat{a}$
- معادلة انحدارxعلى y المتمثلة للمستقيم *Dx/y*: $\hat{x} = \bar{\hat{b}}y_i + \hat{a}$

بالتالي يكون $r = \pm\sqrt{\hat{b}.\bar{\hat{b}}}$ حيث $-1 \leq r \leq +1$

2- **معامل التحديد** : يبين درجة تأثير المتغير المستقل في التغير التابع

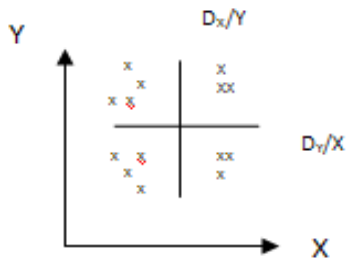
$R^2 = \hat{b}.\bar{\hat{b}}$

3- **معامل الارتباط وخطوط الانحدار** :نميز ثلاث حالات

a.**الحالة الأولى** :

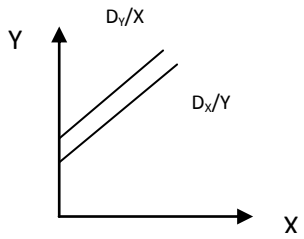
$\Rightarrow r = 0$

لايوجد أي ارتباط بين الظاهريتين



**b الحالة الثانية :**

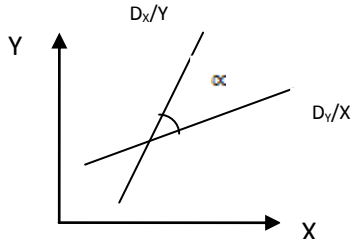
$$\Rightarrow r = \pm 1$$




r=+1

يوجد ارتباط تام (طردي أو عكسي)

بين x و y




0<r<1

**c.الحالة الثالثة :**

$$\Rightarrow r\epsilon]-1,+1[$$

يوجد ارتباط جزي طردي او عكسي بين

x و y

**4-التباين المشترك بين x و y**

$$\text{con}(x.y) = \frac{1}{N}\varepsilon x_i y_i - \bar{x}\bar{y} = \frac{\varepsilon(x_i - \bar{x})(\hat{y}_i - \bar{y})}{N}$$

لدينا قيمة $\hat{b}$ و $\bar{\hat{b}}$ كما لي :

$$\hat{b} = \frac{\varepsilon x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\varepsilon x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

$$\bar{\hat{b}} = \frac{\varepsilon x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\varepsilon y_i^2 - n\bar{\bar{y}}^2} =$$

بقسمة البسيط والمقام لكل $\hat{b}$ و $\bar{\hat{b}}$ على $N$ نجد

$$\hat{b} = \frac{\frac{\varepsilon x_i y_i}{N} - \bar{x}\bar{y}}{\frac{\varepsilon x_i^2}{N} - \bar{x}^2} = \frac{\mathrm{con}(x.y)}{v(x)} = \frac{\mathrm{con}(x.y)}{G(x)^2}$$

$$\bar{\hat{b}} = \frac{\frac{\varepsilon x_i y_i}{N} - \bar{x}\bar{y}}{\frac{\varepsilon y_i^2}{N} - \bar{y}^2} = \frac{\mathrm{con}(x.y)}{v(y)} = \frac{\mathrm{con}(x.y)}{G(y)^2}$$

ولدينا أيضا :

$$= \frac{\mathrm{con}(x.y)}{G(x)^2.G(y)^2} r = \pm\sqrt{\hat{b}.\bar{\hat{b}}} = \pm\sqrt{\frac{\mathrm{con}(x.y)}{G(x)^2}}\sqrt{\frac{\mathrm{con}(x.y)}{G(y)^2}}.$$

إذن $r = \frac{\mathrm{con}(x.y)}{G(x)^2.G(y)^2}$

## III / الخطأ المعياري للتقدير :

يبين هذا المقياس مقدار انحراف القيم الفعلية للمتغير التابع عن قيمتها المقابلة المقدرة (المحسوبة )

$$Sy_{i\ x} = \sqrt{\frac{\varepsilon e_i^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{\varepsilon(y_i - \bar{y})^2}{n-2}}$$

يتعلق الأمر بالخطأ المعياري للتقدير

لانحدار y على x حيث :

N: تمثل عدد لمشاهدات

k : عدد الثوابت ويساوي إلى 2 هما $\hat{a}$،$\hat{b}$وبالتالي

**بالطريقة العادية :**

$$Sy_i, \sqrt{\frac{\varepsilon y_i^2 - \hat{a}\varepsilon y_i - \hat{b}\varepsilon x_i y_i}{n-2}}$$

$$Sy_i, \sqrt{\frac{\varepsilon y_i^2 - \hat{b}\varepsilon x_i y_i}{n-2}}$$

**بالطريقة المختصرة :**

حيث : $\left.\begin{array}{l} x_i = x_i - \bar{x} \\ y_i = y_i - \bar{y} \end{array}\right\}$

**ملاحظة :** كلما اقتربت نقاط الانتشار من خط المستقيم (خط الانحدار ) كلما كانت قيمة الخطأ المعياري للتقدير $Sy_i, x$ اصغر ما يمكن

ولفهم الخطأ المعياري نقوم بعرض المفاهيم التالية :

1- **التباين المفسر** (:مجموع مربعات الانحدار ) ويمثل مجموع مربعات انحرافات القيم المقدرة عن وسطها الحسابي .

$$\varepsilon\hat{y}_i^2 = \varepsilon(\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \hat{b}[\varepsilon x_i y_i - Nx\bar{y}] = \hat{b}^2\varepsilon x_i^2 / x_i = x_i - \bar{x}$$

يعني التباين المفسر نسبة تأثير المتغير xفي y

4-**التباين غير المفسر** : (مجموع مربعات الأخطاء ) ويمثل مجموع مربعات انحرافات قيم المشاهدة $y_i$عن القدرة $\hat{y}_i$ ويعطي بـ:

$$\varepsilon e_i^2 = \varepsilon(y_i - \hat{y}_i)^2 = \varepsilon y_i^2 - \hat{a}\varepsilon y_i - \hat{b}\varepsilon x_i y_i = \varepsilon y_i^2 - b^1\varepsilon x_i y_i$$

إذا كانت قيمة التباين غير المفسر هو الكبير هذا يعني أن هناك عوامل أخرى تدخل في تحديد العلاقة بين xو y

3- **التباين الإجمالي** : (مجموع مربعات الانحرافات ) وهي مجموع مربعات انحرافات قيم المشاهدة $y_i$عن وسطها الحسابي $\bar{y}$ويعطي بـ:

$$\varepsilon y_i^2 = \varepsilon(y_i - \bar{y})^2 = \varepsilon y_i^2 - \frac{(\varepsilon y_i)^2}{N}$$

التباين الإجمالي =التباين المفسر +التباين غير المفسر

$$+\varepsilon \hat{y}_i^2 = \varepsilon y_i^2 \varepsilon e_i^2$$

4-**تباين $\hat{a}$, $b$** :

N عدد المشاهدات تباين $\hat{a}$ $\quad S_{\hat{a}}^2 = \frac{\varepsilon e_i^2}{n-k} \cdot \frac{\varepsilon x_i^2}{N \varepsilon x_i^2}$

k عدد الثوابت = 2

$$x_i = x_i - \bar{x}$$

تباين $\hat{b} S_{\hat{b}} = \frac{\varepsilon e_i^2}{n-k} \cdot \frac{1}{\varepsilon x_i^2}$

**<u>اختبار معنوية علاقة الانحدار</u>** :لإجراء الاختبار نعتمد على مفهوم الخطأ المعياري للتقدير ، بعد حسابه نختبر المعنوية الإحصائية لكل من $\hat{a}$و $\hat{b}$ باستخدام التوزيع (t) حيث

$$t_{n-k} = \frac{\hat{b}}{S_{\hat{b}}}$$

t:التوزيعt

$S_{\hat{b}}$ : الخطأ المعياري للتقدير لـ:$\hat{b}$

N: عدد المشاهدات

k: عدد الثوابت =2

نقارن قيمته المحسوبة بقيمة الجدولية بدرجات حرية n-2 حيث إذا كانتt المحسوبة اقل من t الجدولية تقبل بفرضية العدم :$H_0: \hat{b} = 0$ ، اما إذا كانت t المحسوبة أكبر من t

الجدولية نرفض فرضية العدم $H_0: \hat{b} = 0$ ونأخذ بالفرضية المقابلة $H_1: \hat{b} > 0$ (أي أنه علاقة انحدار جوهرية بين x وy ،وبالتالي يمكن استخدام العلاقة المقدرة في التنبؤ ) .

ملاحظة : بعد اختبار المعنوية الاحصائية لـ: $\hat{b}$ يمكن اختبار ايضا معنوية $\hat{a}$ .

- كل العلاقات التي وردت تتعلق بانحدار y على x عندما يتعلق المر بانحدار x على y يجب قلب الترميزات .

- **<u>معامل التحديد :</u>**

$$R^2 = \frac{\text{التباين المفسر}}{\text{التباين الاجمالي}} = \frac{\varepsilon \hat{y}_i^2}{\varepsilon y_i^2} = \frac{\varepsilon(\hat{y} - \bar{y})^2}{\varepsilon(y_i - \bar{y})^2} = \frac{b^1 \varepsilon x_i^{2^1}}{\varepsilon y_i^2}$$

$$R^2 = \hat{b} \ . \hat{b}$$

مثال : دارسة حول الدخل (X) والادخار (Y) أدت إلى النتائج التالية :

N=10, $\bar{x} = 7{,}5 \times 10^4 DA$ , $\bar{y} = 2{,}7 \times 10^4 DA$, $\varepsilon y_i^2 = 645 \times 10^8 DA$ , $\varepsilon y_i^2 = 99.10^8 DA$

X

$$\varepsilon x_i y_i = 248 \times 10^8 DA$$

1- كتابة معادلة الانحدار Y على X:

$$b^1 = \frac{\varepsilon x_i y_i - N\bar{x}\bar{y}}{\varepsilon y_i^2 - N\bar{x}^2} = \frac{248 - 10(7{,}5)(2{,}7)}{645 - 10(7{,}5)^2} = 0{,}55$$

$$\hat{a} = \bar{y} - b\bar{x} = 2{,}7 - (0{,}55)(7{,}5) \Rightarrow \hat{a} = 1{,}43 \times 10^4$$

$$\frac{Dy}{x} : \bar{y} = 0{,}55 x_i - 1{,}43.10^4$$

2-**<u>حساب التباين المفسر وغير المفسر</u>** :

$$\varepsilon\hat{Y}^2 = b^1[\varepsilon x_i y_i - N\bar{x}\bar{y}] = 0{,}55[248 - 10(7{,}5)(2{,}7)]$$
$$= 25{,}09 \times 1_0^8 DA$$

$$\varepsilon e_i^2 = \varepsilon y_i^2 - \hat{a}\varepsilon y_i \quad - \frac{b\varepsilon x_i y_i}{\bar{y}} = \frac{\varepsilon y_i}{N} \Rightarrow \varepsilon y_i = N\bar{y} = 27$$

=99-5-1 ,43(527)-(0 ,55)(258)=1,006 . $10^8$DA

3- **<u>الخطأ المعياري للتقدير y على x :</u>**

$$S_{Y_{X^S}} \sqrt{\frac{\varepsilon e_i^2}{n-k}} = \sqrt{\frac{1{,}006}{10-2}} = 0{,}35 \times 1_0^4 DA$$

نلاحظ إلى الانحراف بين القيم الحقيقية والمقدرة صغيرة جدا

4-**<u>الخطأ المعياري للتقدير لـ:$b^1, \hat{a}$</u>**

$$\text{تباين } \hat{b} \; S_{\hat{b}}^2 = \frac{\varepsilon e_i^2}{n-k} . \frac{1}{\varepsilon x_i^2} = 0{,}125 \times \frac{1}{82{,}5} = 0{,}0015 \Rightarrow S_{\hat{b}} = 0{,}039$$

$$\text{تباين } \hat{a} \; S_{\hat{a}}^2 = \frac{\varepsilon e_i^2}{n-k} . \frac{\varepsilon x^2}{n\varepsilon x_i^2} = 0{,}125 \times \frac{645}{10(82{,}5)} = 0{,}098 \Rightarrow S_{\hat{a}} = 0{,}31$$

حيث: $\varepsilon x_i^2 = \varepsilon x_i^2 - N\bar{x}^2$

=645-10$(7{,}5)^2$ = 82,5

$S_{b^1}, S_{\hat{a}}$صغير جدا فهو لا يؤثر في قوة العلاقة بين xو y

**<u>معامل التحديد</u>**

$$r^2 = \hat{b}\hat{b} = (0{,}55)(1{,}74) = 0{,}98$$

96% من التغيرات في y ترجع إلى تغيرات x

**معامل الارتباط:**

$$r = +\sqrt{\hat{b}.\widehat{b'}} = \sqrt{0,55.1,74} = 0,98$$

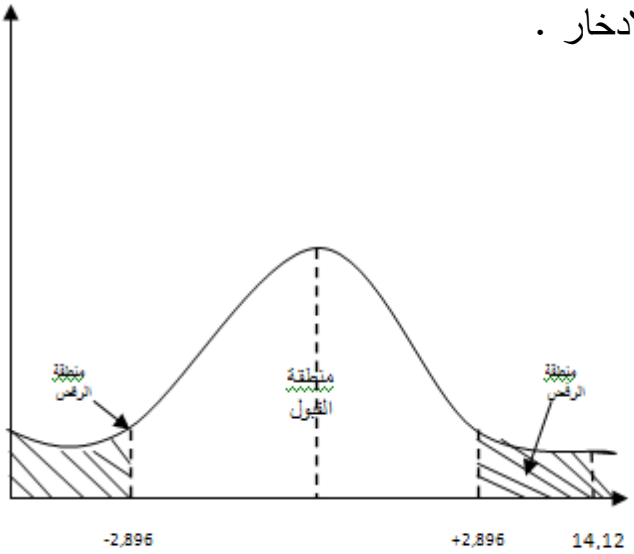
يوجد ارتباط قوي بين الدخل والادخار

**اختبار معنوية تاثير X على Y عند مستوى دلالة 2%:**

$$t_{N-K} = \frac{\hat{b}}{s_{\hat{b}}} = \frac{0,55}{0,039} = 14,12$$

قيمة tالجدولية عند $\propto = 0,01$ودرجة حرية n-k=10-2=8 هي 2,896

t المحسوبة >t الجدولية إذن نرفض فرضية العدم $H_0$ونأخذ بالفرضية القابلة التي تقر بوجود علاقة تأثير بين الدخل والادخار .



**معامل ارتباط الرتب :**

يستخدم هذا المقياس عند قياس العلاقة بن الظواهر الوصفية والمتغيرات الكيفية (التي يمكن التمييز بينها بمعرفة (رتبها ) ،كما يمكن استخدامه في قياس العلاقة بين الظواهر التي يمكن قياسها بأحد المقياس المادية

لحساب معامل الارتباط للرتب لمجموعة أزواج البيانات تقوم بترتيبها تصاعديا أو تنازليا عوضا بمن قيمتها .

ويعطي معامل ارتباط الرتب لـ: spearman بالعلاقة التالية :

$$y_s = 1 - \frac{6\varepsilon d_i^2}{N(N^2-1)}$$

$d_i$: تمثل الفروق بين رتب xو y

N: عدد أزواج القيم (Y،X)

كلما كانت الفروق بين رتب القيم التناظرية للمتغيرين كبيرة كلما دل ذلك على صف العلاقة بين المتغيرين ،والعكس صحيح

مثال 1 : فيما يلي الدرجات التقديرية لـ: 10 طلبة في امتحان مادتي الاقتصاد الجزئي والإحصاء

| الطالب | x النتيجة التقديرية للاقتصاد الجزئي | y النتيجة التقديرية للإحصاء | رتب x | رتب y | الفروق di | مربعات الفروق $d_i^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | جيدا جدا | جيد | 8,5 | 6,5 | 2 | 4 |
| 2 | جيد | مقبول | 6 | 4 | 2 | 4 |
| 3 | جيد جدا | جيد جدا | 8,5 | 8,5 | 0 | 0 |
| 4 | ممتاز | ممتاز | 10 | 10 | 0 | 0 |
| 5 | جيد | جيد جدا | 6 | 8,5 | -2,5 | 6,25 |
| 6 | مقبول | جيد | 3,5 | 6,5 | -3 | 9 |
| 7 | ضعيف جدا | ضعيف | 1 | 2, | -1 | 1 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | جيد | مقبل | 6 | 4 | 2 | 4 | |
| 9 | مقبول | مقبول | 3,5 | 4 | -0,5 | 025 | |
| 10 | ضعيف | ضعيف جدا | 2 | 1 | 1 | 1 | |
| ∑ | / | / | / | / | 0 | 29,5 | |

$$y_s = 1 - \frac{6\varepsilon d_i^2}{N(N^2-1)}$$

$$=1 - \frac{6\times 29,5}{10(10^2-1)}$$

$$y_s = 0,82$$

يوجد علاقة ارتباط قوية بين الدرجات التقديرية للاقتصاد الجزئي والإحصاء على التوالي