

كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير، جامعة الحاج لخضر - باتنة -

الأستاذة: بوضوردي صليحة.

أستاذة مساعدة - أ -

برنامج الأعمال التطبيقية للسداسي الأول - مقياس الاحتمالات -

موجهة لطلبة السنة الثانية، فرع التسيير، تخصص تسيير، ومحاسبة ومالية.

في إطار الأعمال التطبيقية لمقياس الاحتمالات تم تقديم ثلاث سلاسل، والتي تعد كافية لتغطية الدروس المقدمة حول المقياس من طرف الأساتذة المحاضرين.

يتم تقسيم كل سلسلة على مجموعة حصص لتقديمها على أكمل وجه، بحيث:

- السلسلة الأولى تقدم على مدى أربع حصص، بحيث تغطي المحور الأول حول التحليل التوافقي.

- السلسلة الثانية تقدم على مدى خمس حصص، بحيث تغطي المحور الثاني حول المجموعات، والمحور الثالث حول نظريات الاحتمالات (الكلية والمركبة).

- السلسلة الثالثة تقدم على مدى أربع حصص، بحيث تغطي المحور الرابع حول المتغير العشوائي والتوزيعات الاحتمالية.

المعلمة الأولى.

تمرين رقم 1:

بفرض عدم السماح بالتكرار

1/ كم عددا مكونا من 3 أرقام يمكن تشكيله من الأرقام التالية 2,3,5,6,7,9 ؟

2/ كم عددا منهم اقل من 400 ؟

3/ كم عددا منهم زوجيا؟

4/ كم عددا منهم فرديا؟

5/ كم عددا منهم مضاعف للرقم 5؟

تمرين رقم 2:

بكم طريقة يمكن توزيع 9 ألعاب على 4 أطفال بحيث يتحصل الطفل الأصغر على 3 لعب و الأطفال الآخرون على لعبتين فقط؟

تمرين رقم 3:

صندوق يحتوي على 8 علب من عطور مختلفة نقوم بسحب 3 علب (على التوالي):

1/ أحسب عدد الحالات الممكنة إذا كان السحب بالإرجاع؟

2/ أحسب عدد الحالات الممكنة إذا كان السحب بدون إرجاع؟

تمرين رقم 4:

لدينا 4 ألوان مختلفة وطلب منا تشكيل أعلام من 3 ألوان:

1/ماهو عدد الأعلام الممكن تشكيلها؟

2/ماهو عدد الأعلام الممكن تشكيلها إذا كان العلم يحتوي على لون واحد مرتين و لايتكرر نفس اللون جنب مثيله؟

تمرين رقم 5:

بكم طريقة يمكن لـ 6 ركاب أن يركبوا في سيارة إذا كان عدد الركاب الذين يمكنهم القيادة 3 فقط؟

تمرين رقم 6:

طُلب منك ترتيب 11 كتاباً على رف أفقي منها: 6 رياضيات, 3 فيزياء, 2 كيمياء

1/ بكم طريقة يمكنك ترتيب هذه الكتب إذا لم يطلب منك ترتيب كل مادة مع بعضها (أي الترتيب بصورة مختلفة)؟

2/ بكم طريقة يمكنك ترتيب الكتب إذا كانت كتب كل مادة متطابقة ؟

3/ إذا اشترط عليك ترتيب كل مادة مع بعضها، فيكم طريقة يمكنك ترتيب هذه الكتب إذا كانت كتب كل مادة مختلفة؟

4/ بكم طريقة يمكنك ترتيب هذه الكتب إذا كان لابد عليك مراعاة ترتيب المواد و ليس الكتب؟

تمرين رقم 7:

يُختار في كل عام في إحدى الكليات وفد مكون من 4 طلبة لتمثيل الكلية في الاجتماع السنوي العام في الاتحاد الوطني للطلاب:

1/ بكم طريقة يمكن اختيار الوفد إذا كان عدد الطلاب الذين تتوفر فيهم الشروط 12؟

2/ بكم طريقة يمكن الاختيار إذا كان اثنان من الطلاب الملائمين لن يستطيعا حضور الاجتماع معا؟

3/ بكم طريقة يمكن الاختيار إذا كان هناك طالب و طالبة متزوجين و لا يستطيع أحدهما حضور الاجتماع منفردًا؟

تمرين رقم 8:

في أحد الامتحانات يجب على الطالب أن يجيب على ثمانية من عشرة أسئلة:

1/ بكم طريقة يمكن للطلاب أن يختار الأسئلة؟

2/ بكم طريقة يمكنه الاختيار إذا كانت الأسئلة الثلاثة الأولى إجبارية؟

3/ بكم طريقة يمكنه الإجابة إذا كان من الضروري أن يجيب على أربعة أسئلة من الأسئلة الخمسة الأولى؟

تمرين رقم 9:

يتطلب النجاح في السنة الأولى من إحدى المدارس التحضيرية في الاقتصاد أن يمتحن الطالب في أربعة مجموعات من المقاييس :

G1 : (M1.M2.M3.M4)

G2 : (P1 .P2.P3)

G3 : (C1 .C2.C3)

G4: (S1.S2)

الشرط الأدنى للنجاح هو:

أن يتحصل الطالب على 3 مقاييس من المجموعة الأولى G1، مقياسين من مقاييس المجموعة G2، مقياسين من المجموعة G3 و مقياسي المجموعة G4.

1/ ماهو عدد الحالات الممكنة لنجاح الطالب وفق الحد الأدنى للنجاح ؟

2/ ماهو عدد الحالات الأخرى الممكنة خارج حالة الشرط الأدنى للنجاح؟

السلمة الثانية

التمرين 01:

أحسب 2^n مع $n \in \mathbb{N}^*$

التمرين 02:

إذا كانت لدينا مجموعة $E = \{1, 2, 3\}$
أوجد $\delta(E)$ مجموعة أجزاء E .

التمرين 03:

لدينا صندوق مكون من 08 كرات ملونة: 04 بيضاء، 03 سوداء، كرة صفراء. ولتكن التجربة العشوائية سحب كرتين في آن واحد.

- 1/ أحسب احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون .
- 2/ أحسب احتمال الحصول على كرتين مختلفتي اللون.

التمرين 04:

لتكن لدينا التجربة العشوائية المتمثلة في رمي حجرة نرد مرتين على التوالي، وليكن لدينا الحوادث التالية:

A: "مجموع النقاط هو عدد زوجي".

B: "مجموع النقاط هو عدد فردي أكبر من 8".

C: "المجموع أقل تماما من 7".

1/ أحسب: $P(A \cap B)$ ، $P(A \cap C)$ ، $P(B \cap C)$

2/ أحسب: $P(A \cup B \cup C)$ ، $P(A \cap B \cap C)$

التمرين 05:

نرمي حجرة نرد مرتين على التوالي وليكن N هو مجموع النقاط المحصل عليها، وليكن لدينا الحوادث التالية:

A: المجموع N هو عدد زوجي ، B: المجموع N هو عدد فردي.

1/ أحسب: $P(A \cap B)$ ، $P(A \cup B)$

2/ ليكن n_1 نتيجة الرمية 1 و n_2 نتيجة الرمية 2 وليكن $D = (n_1 - n_2)$

أحسب احتمال الحصول على D عدد سالب أقل من 3-.

ب/ أحسب احتمال $P(4 \geq D \geq 1)$.

التمرين 06:

ليكن لدينا ثلاثة أحداث A, B, C ، عبر بتعبير المجموعات عن الأحداث التالية:

E_1 : تحقيق الحدث A فقط.

E_2 : تحقيق أحد الأحداث على الأقل.

E_3 : تحقيق أحد الأحداث على الأكثر.

التمرين 07:

ليكن لدينا ثلاثة أحداث A, B, C حيث :

$$P(A) = 0.3, P(B) = 0.25, P(C) = 0.25, P(A \cap B) = 0.15, P(A \cap C) = 0.20, P(B \cap C) = 0.08,$$

$$P(A \cap B \cap C) = 0.08, P(C) = 0.15,$$

1/ أرسم شكل venn حسب هذه المعطيات.

2/ إذا كان الحدث E هو الحدث المتمثل في "تحقيق A و B وعدم تحقيق C ". احسب $P(E)$.

3/ إذا كان الحدث F هو الحدث المتمثل في "تحقيق حادثين وحادثين فقط من بين الثلاثة حوادث A, B, C ،

$P(F)$ أحسب $P(F)$.

التمرين 08:

ليكن لدينا حدثين A و B مستقلين .
برهن أن A و \bar{B} مستقلين.

التمرين 09:

صندوق يحتوي على n_1 كرة بيضاء و n_2 كرة سوداء، ولتكن التجربة العشوائية سحب كرة بإرجاع m مرة، وليكن لدينا الأحداث التالية:
 E_i : الحصول على كرة بيضاء لأول مرة بعد i محاولة ($1 \leq i \leq m$).
 F_i : الحصول على كرة بيضاء i مرات خلال الـ m محاولة.
1/ أحسب $P(E_i)$ و $P(F_i)$.
2/ أحسب احتمال الحصول على كرة بيضاء على الأقل خلال الـ m محاولة.

التمرين 10:

لدينا حجرة نرد مزورة أو مغشوشة بحيث أن احتمال الحصول على الرقم 1 يساوي ضعف قيمة احتمال الحصول على أي رقم آخر.
1/ احسب احتمال الحصول على الرقم 1.
2/ إذا رمينا حجرة نرد 3 مرات على التوالي فما هو احتمال الحصول على 4 و 2 و 1 بهذا الترتيب؟

التمرين 11:

لدينا 4 صناديق مرقمة من 1 إلى 4: $U_1 = \{3B, 3N\}$ ، $U_2 = \{2B, 1N\}$ ، $U_3 = \{1B, 1N\}$ ، $U_4 = \{4B, 3N\}$.
نسحب بطريقة عشوائية أحد الصناديق ثم نسحب منه كرة.
1/ إذا كانت الكرة المحصل عليها بيضاء فما هو احتمال أن تكون من الصندوق الثالث U_3 ؟
2/ ما هو احتمال أن تكون الكرة المحصل عليها سوداء؟

التمرين 12:

لدينا 3 ورشات A, B, C في مصنع محركات ، 50% من إنتاج المصنع هو من الورشة A ، 30% من الورشة B
و 20% من الورشة C. إذا كان 5% و 3% و 2% هي نسبة الإنتاج الغير صالح للورشات A, B, C على التوالي:
1/ نختار بطريقة عشوائية محرك من المصنع ، ما هو احتمال الحصول على محرك غير صالح؟
2/ إذا كان المحرك غير صالح ، فما هو احتمال أن يكون من الورشة A ؟

التمرين 13:

صندوق يحتوي على 8 كرات بيضاء و 5 كرات سوداء ، نسحب 05 كرات بدون إرجاع أحسب احتمال الحصول على 03 كرات بيضاء في الـ 03 محاولات الأولى ثم كررتين سوداوتين في المحاولتين الأخيرتين.

السلسلة الثالثة.

التمرين الأول: ليكن لدينا صندوق يحتوي على كرات بيضاء بنسبة 60% وكرات سوداء بنسبة 30% كرات صفراء بنسبة 10%، ولتكن التجربة العشوائية سحب كرة بإرجاع 3 مرات وليكن المتغير العشوائي "الحصول على اللون الأبيض":

- ما هي طبيعة المتغير العشوائي X (برر الجواب)؟
- أوجد قانون احتمالات X ودالة توزيعه؟
- أحسب احتمال عدم الحصول على اللون الأبيض؟

التمرين الثاني: ليكن لدينا صندوق يحتوي على كرتين بيضاوين و3 كرات سوداء، ولتكن التجربة العشوائية سحب كرة بدون إرجاع 3 مرات، وليكن X المتغير العشوائي "الحصول على اللون الأبيض خلال التجربة":

- أوجد $X(S)$ مجموعة تعريف X ؟

- أوجد قانون احتمالات X ودالة توزيعه؟

التمرين الثالث: تحتوي علبة على 100 قطعة غيار من بينها 10 غير صالحة، يشتري زبون بطريقة عشوائية قطعتين، فما هو احتمال أن تكون غير صالحة؟

التمرين الرابع: لتكن التجربة العشوائية رمي حجر نرد في آن واحد ولتكن T مجموع النقاط المحصل عليها.

- أوجد قانون احتمال T ؟

- إذا كان X هو عدد مرات الحصول على الرقم 6 خلال التجربة: فأوجد قانون احتمالات X ودالة توزيعه؟

التمرين الخامس: علبة كبريت تحتوي على n عمود من بينها k أعمدة محروقة، نسحب بإرجاع عمود من العلبة وليكن X : "الحصول على عمود غير محروق لأول مرة"، فأوجد $X(S)$ مجموعة تعريف X ؟ وما هي إذن طبيعة المتغير العشوائي X ؟

إذا قمنا بسحب عمود بإرجاع 121 مرة:

- ما هو احتمال أن نحصل على عمود واحد غير محروق على الأقل على الأقل خلال التجربة؟

- ما هو احتمال الحصول على عمودين غير محروقين على الأكثر؟

التمرين السادس: لتكن التجربة العشوائية رمي حجر نرد مرتين على التوالي، ولتكن T طرح النقاط المحصل عليها $(r_1 - r_2 = T)$.

- أوجد قانون احتمال T ؟

- ما هو منوال T ؟

التمرين السابع: ليكن X متغير عشوائي موزع توزيع ثنائي الحدين (n, p) .

- أحسب $E(X)$ ؟

- أحسب $V(X)$ ؟

التمرين العاشر: نفس السؤالين السابقين في حالة X موزع توزيع بواسون $\text{poisson}(\lambda)$.

التمرين الثامن: ليكن X متغير عشوائي متقطع، متوزع حسب توزيع منتظم على المجال.

- أوجد عبارة كثافة احتمال المتغير العشوائي $f(X)$

- أوجد عبارة دالة توزيع المتغير العشوائي $F(X)$

- أحسب $E(X)$ و $V(X)$ ؟

التمرين الحادي عشر: ليكن متغير عشوائي مستمر وكثافة احتماله معرفة كما يلي:

$$f(x) = \frac{\alpha-1}{x^\alpha} \quad \text{si } x \in [1, +\infty[$$

$$f(x) = 0 \quad \text{si } x \notin [1, +\infty[$$

$$\alpha \in \mathbb{N}^* \quad \& \quad \alpha > 1$$

- أحسب $E(X)$ ؟

- أحسب $V(X)$ ؟

التمرين الثاني عشر: صندوق يحتوي على 8 كرات من بينها 5 بيضاء و3 سوداء، ولتكن التجربة العشوائية سحب بإرجاع كرة 6 مرات، ما هو احتمال الحصول على ثلاث مرات اللون الأبيض لأول مرة؟