كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير – جامعة باتنة 1 -

قسم التعليم الأساسي

مادة الرياضيات II

حل السلسلة 01 -السداسي الثاني -الفضاءات الشعاعية- 2019/2018

تمرين 04:

$$F = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_3 - 2x_2\right\}$$

$\big((0,0,0) \in F \Longrightarrow F \neq \phi\big)$

/1 لإثبات أن F فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$ يكفي إثبات أنه ف ش ج من الـف ش $\mathbb{R}^3$ ، نستخدم النظرية

$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,, \forall\, u, v \in F : \alpha u + \beta v \in F$$

Supposons $u = (x_1, x_2, x_3)$, $v = (y_1, y_2, y_3)$

$$u \in F \Longrightarrow x_1 = x_3 - 2x_2 \qquad , \qquad v \in F \Longrightarrow y_1 = y_3 - 2y_2$$

نبحث عن مركبات الشعاع $\alpha u + \beta v$ ثم ننظر هل تحقق شرط المجموعة F

$$\alpha u + \beta v = \alpha(x_1, x_2, x_3) + \beta(y_1, y_2, y_3) = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3)$$

هل $\alpha x_1 + \beta y_1 = \alpha x_3 + \beta y_3 - 2(\alpha x_2 + \beta y_2)$ ؟

$$\alpha x_1 + \beta y_1 = \alpha(x_3 - 2x_2) + \beta(y_3 - 2y_2) = \alpha x_3 + \beta y_3 - 2(\alpha x_2 + \beta y_2)$$

إذن F ف ش ج من $\mathbb{R}^3$ فهو ف ش حقيقي.

/2 الجملة المولدة لـ F: ليكن: $v = (x, y, z) \in F$

$$v \in F \implies x = z - 2y \implies v = (z - 2y\,, y, z) = y(-2,1,0) + z(1,0,1)$$

وبما أن z،y أعداد حقيقية فإن أي شعاع v من F يُكتب على شكل مزج خطي للشعاعين $(-2,1,0)$ و $(1,0,1)$ فهما يُولدان F ، إذن $F = \langle(-2,1,0) + z(1,0,1)\rangle$

/3 الاستقلال الخطي للجملة المولدة:

يكون الشعاعان v_1 ، v_2 مستقلان خطيا إذا وفقط إذا كان من أجل أي عددين حقيقيين λ_1 ، λ_2 فإن

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = (0,0,0) \quad \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0\ ?$$

$$\lambda_1(-2,1,0)+\ \lambda_2(1,0,1)=(0,0,0)\quad\Longrightarrow\begin{cases}-2\lambda_1+\lambda_2=0\\ \lambda_1=0\\ \lambda_2=0\end{cases}\quad\Longrightarrow\lambda_1=\ \lambda_2=0$$

فالشعاعان مستقلان خطيا وبما أنهما يولدان F فهما يشكلان أساسا له ، وبعد F = عدد أشعة الأساس = 2

$$dim(F)=2$$

<u>تمرين 05</u>:

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:2x-y=0\right\}$$

$$v=(x,y)\in D\Longrightarrow 2x-y=0\quad\Longrightarrow\ y=2x\quad\Longrightarrow v=(x,2x)=x(1,2)$$

أي أن الشعاع (1,2) يولد D ولاحظ أن الشعاع المعدوم (0,0) ينتمي إلى D (D مستقيم يمر بالمبدأ) فإن D فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^2$ أساسه هذا الشعاع وبعده 1 .

<u>تمرين 06</u>:

v_1 يُكتب على شكل تركيب خطي للشعاعين v_2 ، v_3 إذا وُجدت مقادير سلمية α ، β من الحقل $\mathbb{R}$ بحيث يكون: $v_1=\alpha v_2+\beta v_3$

$$v_1=\alpha v_2+\beta v_3\Longrightarrow(1,-1,2)=\alpha(1,1,0)+\beta(1,0,1)\Longrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=1\\ \alpha=-1\\ \beta=2\end{cases}\quad\Longrightarrow\begin{cases}\alpha=-1\\ \beta=2\end{cases}$$

Donc $v_1=-v_2+2v_3$

نستنتج أن الجملة مرتبطة خطيا (ليست مستقلة خطيا)
رتبة الجملة = أكبر عدد أشعة تكون مستقلة خطيا ولاحظ أن الشعاعين v_2 ، v_3 مستقلان خطيا فرتبتها = 2

$$rang\{v_1,v_2,v_3\}=2$$

/2 $\{\boldsymbol{u}_1=(0,-1,0)\ ,\ \boldsymbol{u}_2=(1,0,1-\alpha)\ ,\ \boldsymbol{u}_3=(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{0},-\boldsymbol{3})\}$ (هناك خطأ مطبعي في هذا السؤال)

تكون الأشعة u_1 ، u_2 ، u_3 مرتبطة خطيا إذا أمكن إيجاد مقادير سلمية λ_1 ، λ_2 ، λ_3 من الحقل $\mathbb{R}$ <u>ليست كلها معدومة</u> وتحقق: $\lambda_1 v_1+\ \lambda_2 v_2+\ \lambda_3 v_3=(0,0,0)$

$$\lambda_1(0,-1,0)+\ \lambda_2(1,0,1-\alpha)+\ \lambda_3(1+\alpha,0,-3)=(0,0,0)$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}\lambda_2+(1+\alpha)\lambda_3=0----(1)\\ -\lambda_1=0-----------(2)\\ (1-\alpha)\lambda_2-3\lambda_3=0\ \ ----(3)\end{cases}$$

$$(1) \Longrightarrow \lambda_2 = -(1+\alpha)\lambda_3$$

بالتعويض في المعادلة (3) نجد:

$$-(1-\alpha)(1+\alpha)\lambda_3 - 3\lambda_3 = 0 \Longrightarrow (\alpha^2-4)\lambda_3 = 0$$

إذا كان $\alpha \neq 2$ و $\alpha \neq -2$:

$$\alpha \neq -2 \text{ et } \alpha \neq -2 \ \Longrightarrow (\alpha^2-4) \neq 0 \ \Longrightarrow \lambda_3 = 0$$
$$\lambda_3 = 0 \Longrightarrow \lambda_2 = -(1+\alpha)(0) = 0$$

ومن خلال المعادلة لدينا : $\lambda_1 = 0$

إذن كل المقادير السلمية معدومة فالأشعة مستقلة خطيا أي أنها ليست مرتبطة خطيا وتكون مرتبطة خطيا في الحالة الباقية أي في حالة $\alpha = 2$ أو $\alpha = -2$ (يمكنك إعطاء قيم غير معدومة لـ λ_3 ، λ_2)

/3 $B = \{v_1 = (1,-1,2)\ ,\ v_2 = (1,1,0)\ ,\ v = (1,0,0)\}$

نبرهن أن الأشعة مستقلة خطيا وبما أنها ثلاثة أشعة فهي تشكل أساسا لـ $\mathbb{R}^3$.

/4 تعيين إحداثيات u في الأساس B

نفرض أن هذه الإحداثيات هي (x,y,z)

$$u = (0,1,0) = xv_1 + yv_2 + zv \ = x(1,-1,2) + y(1,1,0) + z(1,0,0)$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ -x+y=1 \\ 2x+y+z=0 \end{cases}$$

بطرح المعادلة 1 من المعادلة 3 نجد $x = 0$ ، نعوض في المعادلة 2 نجد $y = 1$ ثم نجد $z = -1$

إذن $u = (x,y,z) = (0,1,-1)$ في الأساس B .

<u>تمرين 07:</u>

/1 E مولد بالجملة $\{v_1\ ,\ v_2\ ,\ v_3\}$ المرتبطة خطيا وأثبتنا سابقا أن الشعاعان $v_2\ ,\ v_3$ مستقلان خطيا فهما يشكلان أساسا لـ E و $dim(E) = 2$.

/2* $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - y = 0\right\}$

$$v = (x,y) \in D \Longrightarrow 2x - y = 0 \quad \Longrightarrow \ y = 2x \quad \Longrightarrow v = (x,2x) = x(1,2)$$

إذن D مولد بالشعاع $(1,2)$ فهو أساس له ومنه $dim(E) = 1$

تمرين 08:

1/ $F = \langle v_1, v_2 \rangle$ أي أن F مولد بالشعاعين v_1, v_2

$$v_1 = e_1 - 2e_3 = (1,0,0) - 2(0,0,1) = (1,0,-2)$$
$$v_2 = e_2 + e_3 = (0,1,0) + (0,0,1) = (0,1,1)$$

إذا كان الشعاعان v_1, v_2 مستقلان خطيا فهما يشكلان أساسا لـ F ، لنبحث هل هما كذلك؟

من أجل أي عددين حقيقيين α ، β

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = (0,0,0) \quad \Longrightarrow \alpha(1,0,-2) + \beta(0,1,1) = (0,0,0) \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ -2\alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

كل المقادير السلمية معدومة فالشعاعان مستقلان خطيا فهما يشكلان أساسا لـ F أي أن $dim(F) = 2$

2/ $G = \langle (3,2,-4), (1,3,1) \rangle$ $\qquad$ $F = \langle (1,0,-2), (0,1,1) \rangle$

لنبرهن أن أشعة أساس F تكتب على شكل مزج خطي لأشعة أساس G

$$(1,0,-2) = a(3,2,-4) + b(1,3,1) \Longrightarrow \begin{cases} 3a + b = 1 \\ 2a + 3b = 0 \\ -4a + b = -2 \end{cases}$$

$$-4a + b = -2 \Longrightarrow b = 4a - 2 \Longrightarrow 3a + 4a - 2 = 1 \Longrightarrow a = {}^{3}/_{7}$$

$$\Longrightarrow b = {}^{12}/_{7} - 2 = {}^{-2}/_{7}$$

$$2a + 3b = 0 \Longrightarrow \frac{6}{7} - \frac{6}{7} = 0 \Longrightarrow 0 = 0$$

استطعنا إيجاد أعداد حقيقية ($a = {}^{3}/_{7}$ ، $b = {}^{-2}/_{7}$) تحقق عبارة التركيب الخطي.

$$(0,1,1) = c(3,2,-4) + d(1,3,1) \Longrightarrow \begin{cases} 3c + d = 0 \\ 2c + 3d = 1 \\ -4c + d = 1 \end{cases}$$

$$-4c + d = 1 \Longrightarrow d = 4c + 1 \Longrightarrow 3c + 4c + 1 = 0 \Longrightarrow c = {}^{-1}/_{7}$$

$$\Longrightarrow d = {}^{-4}/_{7} + 1 = {}^{3}/_{7}$$

$$2c + 3d = 1 \Rightarrow \frac{-2}{7} + \frac{9}{7} = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

استطعنا إيجاد أعداد حقيقية ($c = {}^{-1}/_{7}$ ، $d = {}^{3}/_{7}$) تحقق عبارة التركيب الخطي.

ومنه أشعة أساس F تكتب على شكل مزج خطي لأشعة أساس G أي أن أي شعاع من F يكتب على شكل مزج خطي للأشعة $(1,3,1)$, $(3,2,-4)$ فهي تولد F وبما أنها مستقلة خطيا فهي تشكل أساسا له

إذن F و G لهما نفس الأساس فهما متطابقان $(F = G)$.

/3 $D = \langle e_1 \rangle = \langle (1,0,0) \rangle$

$$v = (x,y,z) \in D \cap F \Leftrightarrow v \in D \ et \ v \in F \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \alpha \in \mathbb{R} \ , \ v = \alpha e_1 \\ \exists \beta, \gamma \in \mathbb{R} \ , \ v = \beta v_1 + \gamma v_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x,y,z) = \alpha(1,0,0) \\ (x,y,z) = \beta(1,0,-2) + \gamma(0,1,1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = 0 \\ x = \beta \\ y = \gamma \\ z = -2\beta + \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ x = \beta \\ \gamma = 0 \\ -2\beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma = 0 \\ -2\beta + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

إذن $v = (x,y,z) = (0,0,0)$ معناه أن $D \cap F = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

(لاحظ أن $dim(D \cap F) = dim\{0_{\mathbb{R}^3}\} = 0$)

(b $\mathbb{R}^3 = D \oplus F \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{R}^3 = D + F \\ D \cap F = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \end{cases}$ (الجمع المباشر بين الفضاءات الشعاعية)

لدينا D ف ش ج من $\mathbb{R}^3$ و F أيضا ، إذن $D + F$ ف ش ج من $\mathbb{R}^3$

لإثبات أن $\mathbb{R}^3 = D + F$ يكفي إثبات أن $dim(D + F) = dim(\mathbb{R}^3)$ حسب النظرية التي تقول (إذا كان H ف ش ج من الف ش A و كان $dim(H) = dim(A)$ فإن $H = A$)

$$\begin{aligned} dim(D + F) &= dim(D) + dim(F) - dim(D \cap F) = \\ &= \quad 1 \quad + \quad 2 \quad - \quad 0 \quad = 3 = dim(\mathbb{R}^3) \end{aligned}$$

إذن $\mathbb{R}^3 = D + F$ مع الشرط الثاني المحقق نجد $\mathbb{R}^3 = D \oplus F$.