جامعة باتنة 1 - الحاج لخضر
كلية العلوم الإقتصادية والتجارية وعلوم التسيير - قسم التعليم الأساسي

السداسي: 2 **السنة الجامعية:** 2022 \ 2023

المستوى: 1 ليسانس ج. م. **مادة:** الرياضيات 2

الإجابة النموذجية لامتحان الدورة العادية

ت 1 (6 نقاط)

لدينا:

$$y'' - 6y' + 8y = 8 \qquad (1)$$

1. المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية (1) هي:

$$r^2 - 6r + 8 = 0$$ 0.5 نقطة

حلول المعادلة التفاضلية (1):

$$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(8) = 36 - 32 = 4 > 0 \Longrightarrow \sqrt{\Delta} = 2 \Longrightarrow \begin{cases} r_1 = \dfrac{6-2}{2(1)} = 2 \\ r_2 = \dfrac{6+2}{2(1)} = 4 \end{cases}$$

r_1: 0.25 نقطة، r_2: 0.25 نقطة

إذن تعطى الحلول العامة للمعادلة التفاضلية على الشكل: $\boxed{y = \lambda_1(x)e^{2x} + \lambda_2(x)e^{4x}}$ 0.5 نقطة

حيث:

$$\begin{cases} e^{2x}\lambda_1'(x) + e^{4x}\lambda_2'(x) = 0 \\ 2e^{2x}\lambda_1'(x) + 4e^{4x}\lambda_2'(x) = 8 \end{cases}$$

0.25 نقطة، 0.25 نقطة

بضرب طرفي المعادلة الأولى في -2 وجمعها مع المعادلة الثانية طرفاً لطرف نجد: $2e^{4x}\lambda_2'(x) = 8$

أي $\lambda_2'(x) = 4e^{-4x}$ 0.5 نقطة

بتعويض $\lambda_2'(x)$ في المعادلة الأولى نجد: $e^{2x}\lambda_1'(x) + 4 = 0$ أي $\lambda_1'(x) = -4e^{-2x}$ 0.5 نقطة

إذن:

$$\begin{cases} \lambda_1(x) = \displaystyle\int -4e^{-2x}dx = 2e^{-2x} + c_1 \\ \lambda_2(x) = \displaystyle\int 4e^{-4x}dx = -e^{-4x} + c_2 \end{cases}$$

0.5 نقطة، 0.5 نقطة

بتعويض $\lambda_1(x)$ و $\lambda_2(x)$ في y نجد:

$$\begin{aligned} y &= \left(2e^{-2x} + c_1\right)e^{2x} + \left(-e^{-4x} + c_2\right)e^{4x} \\ &= 2 + c_1e^{2x} - 1 + c_2e^{4x} \\ \Longrightarrow & \boxed{y = 1 + c_1e^{2x} + c_2e^{4x}} \end{aligned}$$

0.5 نقطة

2. إيجاد حل المعادلة التفاضلية (1) الذي يحقق $y(0)=3$ و$y'(0)=6$:

$$\begin{cases} y(0)=3 \\ y'(0)=6 \end{cases} \iff \begin{cases} 1+c_1+c_2=3 \\ 2c_1+4c_2=6 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} c_1+c_2=2 \\ c_1+2c_2=3 \end{cases}$$

بطرح المعادلة الأولى من المعادلة الثانية طرفاً لطرف نجد: $c_2=1$ 0.5 نقطة

بتعويض c_2 في المعادلة الأولى نجد: $c_1+1=2$ أي $c_1=1$ 0.5 نقطة

إذن الحل المطلوب هو:

$$\boxed{y=1+\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{4x}}$$ 0.5 نقطة

ت 2 (8 نقاط)

1. تعيين بعدي المصفوفتين A وB:

$\dim A = 2\times 3$ 0.5 نقطة $\quad \dim B = 3\times 2$ 0.5 نقطة

2. تعيين قيم العناصر التالية a_{11}، a_{22}، b_{21} وb_{23}:

$a_{11}=3$ 0.5 نقطة $\quad a_{22}=4$ 0.5 نقطة $\quad b_{21}=1$ 0.5 نقطة

b_{23} غير موجودة 1 نقطة

3. حساب A^t، B^t، $A+B^t$، A^t+B و$A\cdot B$:

$$A^t=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$ 0.5 نقطة $$B^t=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$ 0.5 نقطة

$$A+B^t=\begin{pmatrix} 3+0 & 1+1 & 2+1 \\ 6+2 & 4+1 & 5-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 8 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$ 1 نقطة

$$A^t+B=\begin{pmatrix} 3+0 & 6+2 \\ 1+1 & 4+1 \\ 2+1 & 5-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$ 1 نقطة

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 3\cdot 0+1\cdot 1+2\cdot 1 & 3\cdot 2+1\cdot 1+2\cdot(-1) \\ 6\cdot 0+4\cdot 1+5\cdot 1 & 6\cdot 2+4\cdot 1+5\cdot(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}$$ 1 نقطة

4. حساب أثر المصفوفة $A\cdot B$:

$$\mathrm{Tr}(A\cdot B)=3+11=14$$ 0.5 نقطة

ت 3 (6 نقاط)

لدينا:

$$\begin{cases} 3x-2y+z=2 \\ 2x+3y-z=4 \\ x+y+z=3 \end{cases} \qquad (2)$$

1. كتابة الجملة الخطية (2) على الشكل المصفوفاتي:

$$(2) \Longleftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\mathrm{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}}_{B} \quad \boxed{0.5\ \text{نقطة}}$$

2. لنتحقق أن الجملة الخطية (2) تقبل حلاً وحيداً:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 17 \neq 0 \quad \boxed{1\ \text{نقطة}}$$

3. حل الجملة الخطية (2):

$$\Delta = \det a = 17$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 17 \quad \boxed{1\ \text{نقطة}}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{17}{17} = 1 \quad \boxed{0.5\ \text{نقطة}}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 17 \quad \boxed{1\ \text{نقطة}}$$

$$\Longrightarrow y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{17}{17} = 1 \quad \boxed{0.5\ \text{نقطة}}$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 17 \quad \boxed{1\ \text{نقطة}}$$

$$\Longrightarrow z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{17}{17} = 1 \quad \boxed{0.5\ \text{نقطة}}$$

إذن:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$