جامعة باتنة 1 - الحاج لخضر

كلية العلوم الإقتصادية والتجارية وعلوم التسيير - قسم التعليم الأساسي

السداسي: 1 — السنة الجامعية: 2021 \ 2022

المستوى: 1 ليسانس ج. م. — مادة: الرياضيات 1

الإجابة النموذجية لامتحان الدورة العادية

ت 1 (8 نقاط)

لدينا:

$$f(x)=\frac{x^2}{x-1}$$

1. تعيين مجموعة التعريف للدالة f:

$$f \text{ معرفة } \Longleftrightarrow x-1\neq 0$$
$$\Longleftrightarrow x\neq 1$$

إذن مجموعة التعريف هي: $\boxed{D_f=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[}$ ‏1 ن

2. تعيين العددين الحقيقيين a وb:

$$f(x)=x+a+\frac{b}{x-1}\Longleftrightarrow \frac{x^2}{x-1}=\frac{x^2+(a-1)x-a+b}{x-1}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a-1=0 \\ -a+b=0 \end{cases}$$ ‏0.5 ن

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$$ ‏0.5 ن ‏0.5 ن

* حساب $\int f(x)\,dx$:

$$\int f(x)\,dx=\int\left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$\Longrightarrow \boxed{\int f(x)\,dx=\frac{1}{2}x^2+x+\ln|x-1|+c}$$ ‏1.5 ن

3. حساب $f'(x)$:

$$f'(x)=1-\frac{1}{(x-1)^2}$$ ‏0.5 ن

حساب $f''(x)$:

$$f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}$$ ‏0.5 ن

* إثبات أن الدالة f تقبل قيمتين حديتين يطلب تعيينهما:

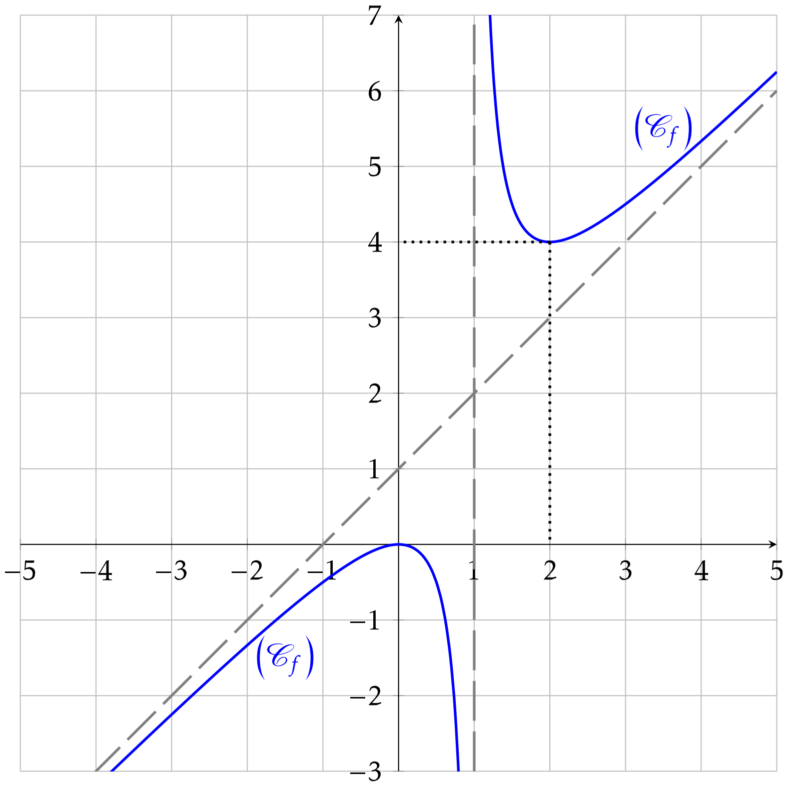
$$f'(x)=0\Longleftrightarrow 1-\frac{1}{(x-1)^2}=0$$
$$\Longleftrightarrow \frac{1}{(x-1)^2}=1$$
$$\Longleftrightarrow (x-1)^2=1$$
$$\Longleftrightarrow x-1=1 \text{ أو } x-1=-1$$
$$\Longleftrightarrow x=2 \text{ أو } x=0$$ ‏1 ن

وبما أن: $x_1 < 1 < x_2$ فإن:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \Longrightarrow f(x_1) = f(0) = \dfrac{0^2}{0-1} = 0 & \boxed{\text{ن } 0.5} \\ x_2 = 2 \Longrightarrow f(x_2) = f(2) = \dfrac{2^2}{2-1} = 4 & \boxed{\text{ن } 0.5} \end{cases}$$

تحديد طبيعتي القيمتين الحديتين:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \Longrightarrow f''(x_1) = f''(0) = \dfrac{2}{(0-1)^3} = -2 < 0 \Longrightarrow f(0) = 0 \text{ قيمة حدية عظمى} & \boxed{\text{ن } 0.5} \\ x_2 = 2 \Longrightarrow f''(x_2) = f''(2) = \dfrac{2}{(2-1)^3} = 2 > 0 \Longrightarrow f(2) = 4 \text{ قيمة حدية صغرى} & \boxed{\text{ن } 0.5} \end{cases}$$



ت 2 (6 نقاط)

لدينا:

$$f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 - 2x - 2y + 1$$

1. تعيين المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى للدالة f:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 4x - 2 \quad \boxed{\text{ن } 0.75}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 4y - 2 \quad \boxed{\text{ن } 0.75}$$

تعيين المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية للدالة f:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = 4 \quad \boxed{\text{ن } 0.75} \qquad \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y) = 0 \quad \boxed{\text{ن } 0.75}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = 0 \quad \boxed{\text{ن } 0.75} \qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = 4 \quad \boxed{\text{ن } 0.75}$$

2. تعيين التفاضل الكلي للدالة f:

$$df(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,dx + \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\,dy \quad \boxed{0.75 \text{ ن}}$$
$$= (4x-2)\,dx + (4y-2)\,dy \quad \boxed{0.75 \text{ ن}}$$

ت 3 (6 نقاط)

لدينا:

$$U_n = \frac{1}{n^2} \qquad V_n = \frac{n+1}{n^3+3n+4} \qquad W_n = \frac{(n!)^2}{(2n-1)!}$$

1. طبيعة السلسلة $\sum_{n\geq 1} U_n$ متقاربة. $\boxed{1 \text{ ن}}$

التعليل: لكونها على شكل سلسلة ريمان بحيث $\alpha = 2 > 1$

2. لنتحقق أن $\sum_{n\geq 1} U_n \sim \sum_{n\geq 1} V_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{V_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{n+1}{n^3+3n+4}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n^3}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{n^3} = 1 \quad \boxed{1 \text{ ن}}$$

استنتاج طبيعة السلسلة $\sum_{n\geq 1} V_n$:

بما أن $\sum_{n\geq 1} U_n$ متقاربة و$\sum_{n\geq 1} U_n \sim \sum_{n\geq 1} V_n$ فإن $\sum_{n\geq 1} V_n$ متقاربة. $\boxed{1 \text{ ن}}$

3. دراسة طبيعة السلسلة $\sum_{n\geq 1} W_n$ باستعمال مقياس دالمبير:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+1)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n-1)!}}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2 (n!)^2}{(2n+1)(2n)(2n-1)!} \cdot \frac{(2n-1)!}{(n!)^2}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2n \cdot 2n}$$
$$= \frac{1}{4} < 1 \quad \boxed{1.5 \text{ ن}}$$

إذن حسب مقياس دالمبير للتقارب فإن السلسلة $\sum_{n\geq 1} W_n$ متقاربة. $\boxed{1.5 \text{ ن}}$