الحل النموذجي للامتحان العادي في مقياس السلاسل الزمنية 2023/2022

حل التمرين الأول:

1/ حساب معاملات الارتباط الذاتي للعينة: $\hat{\rho}_k$

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum (Y_t - \bar{Y}).(Y_{t-k} - \bar{Y})}{\sum (Y_t - \bar{Y})^2}$$

Y_t	Y_{t-1}	Y_{t-2}	Y_{t-3}	Y_{t-4}
75				
80	75			
70	80	75		
75	70	80	75	
75	75	70	80	75

1

- حساب $\bar{Y}$:

1

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y_t}{n} = \frac{75+80+75+70+75}{5} = \frac{375}{5} = 75$$

- حساب $\sum (Y_t - \bar{Y})^2$:

$$\sum (Y_t - \bar{Y})^2 = (75-75)^2 + (80-75)^2 + (70-75)^2 + (75-75)^2 + (75-75)^2$$

$$\sum (Y_t - \bar{Y})^2 = 25 + 25 = 50$$

1

حساب $\hat{\rho}_1$

$$\hat{\rho}_1 = \frac{\sum (Y_t - \bar{Y}).(Y_{t-1} - \bar{Y})}{\sum (Y_t - \bar{Y})^2}$$

$$\hat{\rho}_1 = \frac{(80-75).(75-75) + (70-75).(80-75) + (75-75).(70-75) + (75-75).(75-75)}{50}$$

0.75

$$\hat{\rho}_1 = \frac{-25}{50} = -0.5$$

حساب $\hat{\rho}_2$

$$\hat{\rho}_2 = \frac{\sum (Y_t - \bar{Y}).(Y_{t-2} - \bar{Y})}{\sum (Y_t - \bar{Y})^2}$$

$$\hat{\rho}_2 = \frac{(70-75).(75-75) + (75-75).(80-75) + (75-75).(70-75)}{50}$$

0.75

$$\hat{\rho}_2 = \frac{0}{50} = 0$$

حساب $\hat{\rho}_3$

$$\hat{\rho}_3 = \frac{\sum (Y_t - \bar{Y}).(Y_{t-3} - \bar{Y})}{\sum (Y_t - \bar{Y})^2}$$

$$\hat{\rho}_3 = \frac{(75-75).(75-75) + (75-75).(80-75)}{50}$$

0.75

$$\hat{\rho}_3 = \frac{0}{50} = 0$$

حساب $\hat{\rho}_4$

$$\hat{\rho}_4 = \frac{\sum (Y_t - \bar{Y}).(Y_{t-4} - \bar{Y})}{\sum (Y_t - \bar{Y})^2}$$

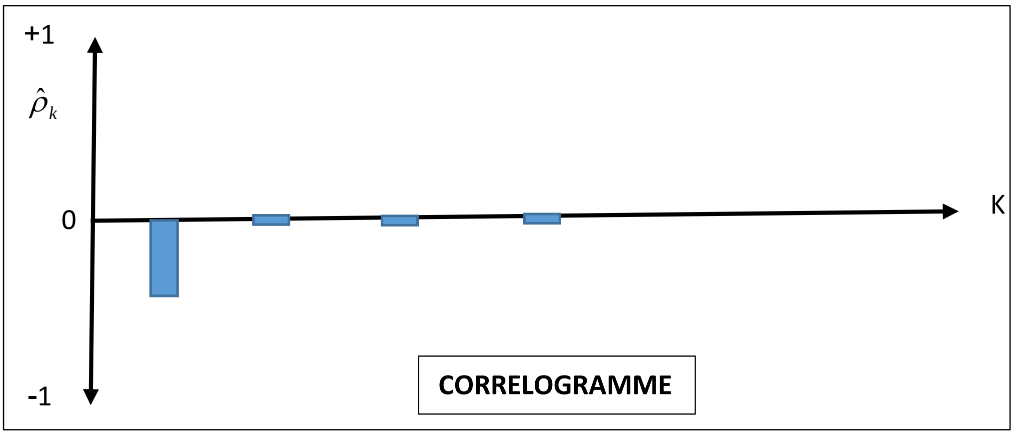
$$\hat{\rho}_4 = \frac{(75-75).(75-75)}{50}$$

0.75

$$\hat{\rho}_4 = \frac{0}{50} = 0$$

2/ تمثيل دالة الارتباط الذاتي بيانيا:

1



حل التمرين 2:

0.5

y	x	y*x	x^2	y^2	
4	73	292	5329	16	
4,5	81	364,5	6561	20,25	
4,7	88	413,6	7744	22,09	
4,8	86	412,8	7396	23,04	
5	87	435	7569	25	
5,5	96	528	9216	30,25	
6	100	600	10000	36	
6,5	110	715	12100	42,25	
7,5	121	907,5	14641	56,25	
8	138	1104	19044	64	
56,5	980	5772,4	99600	335,13	المجموع

1/ تقدير نموذج الانحدار الخطي البسيط: $\hat{Y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}.X_t$

لدينا:

$$\hat{\beta} = \frac{\text{cov}(x.y)}{\text{var}(x)} = \frac{\sum X_i * Y_i - N\overline{X}\overline{Y}}{\sum X_i^2 - \overline{X}^2}$$ 0.5

$$\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{980}{10} = 98$$ 0.5

$$\overline{Y} = \frac{\sum Y_i}{n} = \frac{56.5}{10} = 5.65$$ 0.5

$$\text{cov}(X.Y) = \frac{1}{n}\sum X_i * Y_i - \overline{X}\overline{Y}$$

$$\text{cov}(X.Y) = \frac{1}{10}(5772.4) - 98 * 5.65 = 23.54$$

$$Var(X) = \frac{1}{n}\sum X_i^2 - \overline{X}^2$$

$$Var(X) = \frac{1}{10}(99600) - (98)^2 = 356$$

ومنه:

$$\hat{\beta} = \frac{\text{cov}(x.y)}{\text{var}(x)} = \frac{23.5}{356} = 0,0661$$ 0.5

لدينا:

$$\hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta}\overline{X} = 5.65 - 0.0661(98) = -0,818$$

ومنه: 0.5

$$\hat{Y}_t = -0.818 + 0.0661.X_t$$ 0.5

2/ حساب معامل الارتباط r ومعامل

التحديد R^2:

لدينا:

$$r = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{var}(X)}.\sqrt{\text{var}(Y)}}$$

$$Var(Y) = \frac{1}{n}\sum Y_i^2 - \overline{Y}^2$$ 0.5

$$Var(Y) = \frac{1}{10}(335.13) - (5.65)^2 = 1.591$$

$$r = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{var}(X)}.\sqrt{\text{var}(Y)}} = \frac{23.54}{\sqrt{356}.\sqrt{1.591}} = 0.0989$$

r=0.989 معناه توجد علاقة ارتباط موجبة قوية بين حجم الاستثمار و معدل النمو الاقتصادي.

معامل التحديد: $R^2 = r^2 = (0.989)^2 = 0.979$ معناه ان الاستثمار يؤثر بنسبة 97.9% في مستوى معدل النمو.

0.5

3/ حساب $\hat{\delta}_\varepsilon^2$:

$$\hat{\delta}_\varepsilon^2 = \frac{SCR}{n-2} = \frac{\sum(\overline{Y}_i - \hat{Y}_i)^2}{n-2}$$ 0.5

إيجاد: $\sum(\overline{Y}_i - \hat{Y}_i)^2$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum(Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\sum(Y_i - \overline{Y}_i)^2}$$

$$\rightarrow \sum(Y_i - \hat{Y}_i)^2 = (1 - R^2).(\sum(Y_i - \overline{Y}_i)^2)$$

$$Var(Y) = \frac{1}{n}\sum(Y_i - \overline{Y})^2$$

$$\sum(Y_i^2 - \overline{Y})^2 = n.Var(Y) = 10.(1.591) = 15.91$$

$$\sum(Y_i - \hat{Y}_i)^2 = (1 - 0.979).(15.91) = 0.3396$$

اذن:

$$\hat{\delta}_\varepsilon^2 = \frac{\sum(\overline{Y}_i - \hat{Y}_i)^2}{n-2} = \frac{0.3396}{10-2} = 0.4244$$ 0.5

4/ دراسة معنوية $\hat{\beta}$:

$$t_{cal} = \frac{\hat{\beta}}{\sqrt{V(\hat{\beta})}}$$ 0.5

$$V(\hat{\beta}) = \delta_\varepsilon^2 / (X_i - \overline{X}_i)^2 = \delta_\varepsilon^2 / n.Var(X)$$
$$= 0.04244 / 10.356 = 0.000012$$

$$t_{cal} = \frac{\hat{\beta}}{\sqrt{V(\hat{\beta})}} = \frac{0.0661}{\sqrt{0.000012}} = 19.1$$ 0.5

نلاحظ ان: $t_{cal} > t_{tab}$

ومنه فإننا نرفض فرضية العدم $H_0: \hat{\beta} = 0$

اذن $\hat{\beta}$ لها معنوية عند مستوى دلالة 5%

0.5

حل التمرين 3:

1) دراسة استقرارية السيرورة $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$

- **حساب التوقع $E(Y_t)$:**

$$E(Y_t) = E(Y_{t-1} + \varepsilon_t)$$

0.5

$$\Rightarrow E(Y_t) = E(Y_{t-1}) + E(\varepsilon_t)$$

بما أن $E(\varepsilon_t) = 0$

اذن $\Rightarrow E(Y_t) = E(Y_{t-1})$

نلاحظ أن التوقع ثابت وغير مرتبط بالزمن.

- **حساب التباين $Var(Y_t)$**

$$Var(Y_t) = Var(Y_{t-1} + \varepsilon_t)$$

$$\Rightarrow Var(Y_t) = Var(Y_{t-1}) + Var(\varepsilon_t) + 2cov(Y_t, \varepsilon_t)$$

بما أن $Var(\varepsilon_t) = \delta^2$

$cov(Y_t, \varepsilon_t) = 0$

اذن $\Rightarrow Var(Y_t) = Var(Y_{t-1}) + \delta^2$ 0.5

$$\Rightarrow Var(Y_t) \neq Var(Y_{t-1})$$

ومنه فإن التباين غير ثابت وهو مرتبط بالزمن t

اذن نستنتج أن السيرورة Y_t غير ساكنة لأن أحد الشروط الإحصائية للاستقرارية غير محقق.

- **تطبيق طريقة الفروقات من الدرجة الأولى:**

$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$ 0.5

بما أن $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$

اذن

$\Delta Y_t = (Y_{t-1} + \varepsilon_t) - Y_{t-1} = \varepsilon_t$ 0.5

ومنه $\boldsymbol{\Delta Y_t = \varepsilon_t}$

0.5 وبما أن السيرورة ε_t شوشرة بيضاء فهي مستقرة وبالتالي فإن السيرورة الجديدة ΔY_t سكانة.

2) دراسة استقرارية السيرورة $X_t = \phi.t + \varepsilon_t$

- حساب التوقع $E(X_t)$: 0.5

$$E(X_t) = E(\emptyset.t + \varepsilon_t)$$

$$\Rightarrow E(X_t) = E(\emptyset.t) + E(\varepsilon_t)$$

بما أن $E(\varepsilon_t) = 0$

$$\Rightarrow E(X_t) = E(\emptyset.t)$$

اذن $\Rightarrow E(X_t) = \emptyset.t$

نلاحظ أن التوقع غير ثابت أي مرتبط بالزمن t.

اذن نستنتج أن السيرورة X_t غير ساكنة لأن أحد الشروط الإحصائية للاستقرارية غير محقق. 0.5

- **تطبيق طريقة الفروقات من الدرجة الأولى:**

0.5 $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$ ....(1)

بما أن $X_t = \phi.t + \varepsilon_t$

اذن $X_{t-1} = \phi.(t-1) + \varepsilon_{t-1} = \phi.t - \phi + \varepsilon_{t-1}$

بالتعويض في (1) نجد: $\Delta X_t = (\emptyset.t + \varepsilon_t) - (\emptyset.t - \emptyset + \varepsilon_{t-1})$

$\Delta X_t = \emptyset.t + \varepsilon_t - \emptyset.t + \emptyset - \varepsilon_{t-1}$

0.5 ومنه $\Delta X_t = \emptyset + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$

التأكد من استقرارية السيرورة ΔX_t

وبما أن السيرورة ε_t شوشرة بيضاء فهي مستقرة وبالتالي فإن السيرورة الجديدة ΔY_t سكانة.

- **حساب التوقع $E(\Delta X_t)$:** 0.5

$$E(\Delta X_t) = E(\emptyset + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})$$

$$\Rightarrow E(X_t) = E(\emptyset) + E(\varepsilon_t) - E(\varepsilon_{t-1})$$

بما أن $E(\varepsilon_t) = 0$

$$\Rightarrow E(X_t) = E(\emptyset)$$

اذن $\Rightarrow E(X_t) = \emptyset$

نلاحظ أن التوقع ثابت وغير مرتبط بالزمن.

0.5

- **حساب التباين $Var(\Delta X_t)$**

$$Var(\Delta X_t) = Var(\emptyset + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})$$

$$\Rightarrow Var(Y_t) = Var(\emptyset) + Var(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}) + 2cov(Y_t, \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})$$

بما أن $Var(\emptyset) = 0$; $Var(\varepsilon_t) = \delta^2$; $cov(Y_t, \varepsilon_t) = 0$

$$\Rightarrow Var(\Delta X_t) = 0 + Var(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}) - 0 = Var(\varepsilon_t) + Var(\varepsilon_{t-1}) - 2\,cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = \delta^2 + \delta^2 + 0 = \mathbf{2\delta^2}$$

ومنه فإن التباين ثابت ولا يتأثر بالزمن t .

0.5

- **حساب التغاير $cov(\Delta X_t, \Delta X_{t-k})$**

$$cov(\Delta X_t, \Delta X_{t-k}) = cov(\emptyset + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}, \emptyset + \varepsilon_{t-k} - \varepsilon_{t-k-1})$$

أ) <u>اذا كان $k = 1$</u>

$$cov(\Delta X_t, \Delta X_{t-1}) = cov(\emptyset + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}, \emptyset + \varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2})$$

$$\begin{aligned} cov(\Delta X_t, \Delta X_{t-1}) &: var(\emptyset) + cov(\emptyset, \varepsilon_{t-1}) - cov(\emptyset, \varepsilon_{t-2}) \\ &+ cov(\varepsilon_t, \emptyset) + cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) - cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-2}) \\ &- cov(\varepsilon_{t-1}, \emptyset) - var(\varepsilon_{t-1}) + cov(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}) \\ &= -\delta^2 \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{cov(\Delta X_t, \Delta X_{t-1}) = -\delta^2}$$

ب) <u>اذا كان $k > 1$</u>

$$cov(\Delta X_t, \Delta X_{t-k}) = cov(\emptyset + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}, \emptyset + \varepsilon_{t-k} - \varepsilon_{t-k-1})$$

$$\begin{aligned} cov(\Delta X_t, \Delta X_{t-1}) &: var(\emptyset) + cov(\emptyset, \varepsilon_{t-k}) - cov(\emptyset, \varepsilon_{t-k-1}) \\ &+ cov(\varepsilon_t, \emptyset) - cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) - cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k-1}) \\ &- cov(\varepsilon_{t-1}, \emptyset) - cov(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-k}) \\ &+ cov(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-k-1}) = 0 \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{cov(\Delta X_t, \Delta X_{t-k}) = 0}$$

ومنه: $cov(\Delta X_t, \Delta X_{t-1}) = \begin{cases} -\delta^2 \ldots\ldots\ldots k = 1 \\ 0 \ldots\ldots\ldots\ldots k > 1 \end{cases}$

<u>نلاحظ أن التغاير مرتبط الا بالفجوة الزمنية k وليس بالزمن t</u>

<u>وبالتالي يمكننا القول بان السيرورة الجديدة ساكنة.</u>