الإجابة النموذجية لامتحان الدورة العادية في مقياس الاحصاء 3

التمرين الأول:

$\mu = 50, \qquad \delta = 10,$

$x \sim N(\mu.\delta) \Rightarrow x \sim N(50.10)$

$Z \sim N(0.1) \ / Zi = \frac{xi-\mu}{\delta}$

1- حساب احتمال أن يكون المعيب من الإنتاج محصور بين 40 و60 قطعة. (2 ن)

الطريقة الأولى:

$P(40 < X < 60) = p(\frac{40-50}{10} < Z < \frac{60-50}{10})$

$= p(1- < Z < 1) = p(z < 1) - p(z \leq -1)$

$=0.8413-0.1587=0.6826$

أو استخدام الطريقة الثانية:

$p(-1 < Z < 1) = p(z < 1) - p(z \leq -1)$

$=p(z < 1) - (1 - p(z < 1)$

$=2p(z < 1) - 1$

$=2*0.8413-1=0.6826$

ملاحظة: الطالب مطالب بطريقة واحدة فقط:

2- حساب قيمة x: (1 ن)

لدينا

$p(X < xi) = p(Z < zi) = p(Z < \frac{xi-\mu}{\delta}) = 0.9772$

$= p(Z < \frac{xi-50}{10}) = 0.9772 ....(1)$

الاحتمال من الشكل: $p(Z < zi)$ وبالتالي يمكن استخدام جدول التوزيع الطبيعي.

ومن جدول التوزيع الطبيعي قيمة z المقابلة للاحتمال 0.9772 هي 2 بمعنى:

$p(Z < 2) = 0.9772 ......(2)$

وبالتالي:

$$\frac{xi-50}{10}=2$$

ومنه : $xi = 70$

3- لدينا شرط الجودة هو تحقيق أقل من 55 قطعة معيب، وشرط العملاء أن لا تتعدى نسبة القطع الخارجة عن شروط الجودة نسبة 5% إذن نحسب أولا احتمال تحقق شرط الجودة:

$$p(X< 55)=p(Z< \frac{55-50}{10})= p(Z< 0.5)=0.6915$$

بمعنى : 69.15% وهي نسبة أكبر من شرط الجودة نسبة 5% وبالتالي المصنع لا يستجيب لشرط العملاء. (1.5 ن)

4. توزيع المعاينة لمتوسط المعيب من الإنتاج هو التوزيع الطبيعي لأن المجتمع موزع توزيع طبيعي وانحرافه معلوم (0.5 ن)

$$.\bar{x}\sim N(\mu\bar{x}.\delta\bar{x}) \quad / \quad \mu\bar{x} = \mu = 50, \quad \delta\bar{x}=\frac{\delta}{\sqrt{n}} =\frac{10}{\sqrt{36}}=1.67$$ (1 ن)

$$.\bar{x} \sim N(50.1.67)$$

$$Z \sim N(0.1) \quad / Zi =\frac{.\bar{x}i-\mu.\bar{x}}{\delta\bar{x}}$$

5. حساب احتمال أن يفوق متوسط المعيب من الإنتاج 55 قطعة.

$$p(\bar{x}>55)= p(Z>\frac{.55-50}{1.67})= p(Z>2.99)=1- p(Z\leq 2.99)=1-0.9986=0.0014$$ (1 ن)

6. حساب احتمال أن يقل متوسط المعيب من الإنتاج 55 قطعة في حالة حجم المجتمع يساوي 500 . (3 ن)

بما أن حجم المجتمع N معلوم يجب اختبار ما إذا كان المجتمع محدودا أم لا وذلك بحساب النسبة: n/N

$$\frac{n}{N}=\frac{36}{500}=0.072>0.05$$

وبالتالي المجتمع محدود ويصبح انحراف المعاينة كما يلي:

$$\delta\bar{x} = \frac{\delta}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{10}{\sqrt{36}}\sqrt{\frac{500-36}{500-1}}= 1.6$$

$$p(\bar{x}<55)= p(Z< \frac{.55-50}{1.6})= p(Z< 3.12)= 0.9991$$

التمرين الثاني:

1- التوزيع الاحتمالي لحياة الترانزيستور هو التوزيع الأسي : (0.5 ن)

التبرير: لدينا

أي أن: $p(x > xi) = e^{-\frac{1}{10000}x}$

$p(x < xi) = 1 - e^{-\frac{1}{10000}x} = F(x)$

وهي الدالة التراكمية للتوزيع الأسي.

2- دالة كثافته الاحتمالية من الشكل: (0.5 ن)

$f(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}x} \Longrightarrow f(x) = \frac{1}{10000} e^{-\frac{1}{10000}x} \quad / x \geq 0$

عند أي قيمة أخرى ل x 0

بحيث λ هي متوسط حياة الترانزيستور

ملاحظة: يمكن كتابة دالة كثافة احتمال المتغير x بالشكل التالي إذا اعتبرنا: $\lambda = \frac{1}{\mu}$

$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \Longrightarrow f(x) = \frac{1}{10000} e^{-\frac{1}{10000}x} \quad / x \geq 0$

3- كتابة دالة التوزيع التراكمي لمدة حياة الترانزيستور : هي من الشكل: (0.5 ن)

$F(x) = p(x \leq xi) = 1 - e^{-\frac{1}{\lambda}x} \Longrightarrow F(x) = 1 - e^{-\frac{1}{10000}x}$

ملاحظة: يمكن كتابة دالة التوزيع التراكمي للمتغير x بالشكل التالي إذا اعتبرنا: $\lambda = \frac{1}{\mu}$

$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \Longrightarrow f(x) = 1 - e^{-\frac{1}{10000}x}$

4- المدة المتوقعة لحياة الترانزيستور هي : (0.5 ن)

$E(x) = \mu = 10000$

5- حساب احتمال أن يعيش الترانزيستور أقل من 8000 ساعة. (1 ن)

لدينا $F(x) = p(x \leq xi) = 1 - e^{-\frac{1}{10000}x}$

$F(8000) = p(x \leq 8000) = 1 - e^{-\frac{1}{10000}(8000)} = 1 - 0.4493 = 0.5507$

6- حساب احتمال أن يعيش الترانزيستور أكثر من 8000 ساعة. (1 ن)

لدينا:

$p(x > xi) = 1 - F(x) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{10000}x}) = e^{-\frac{1}{10000}x}$

$$p(x>8000)=e^{-\frac{1}{10000}(8000)} = 0.4493$$

-7 حساب احتمال أن يعيش الترانزيستور أكثر من القيمة المتوقعة. (1 ن)

$$p(x>10000)= e^{-\frac{(10000)}{10000}} = e^{-1} = 0.3679$$

التمرين الثالث:

- التوزيع الأصلي لعدد الجرائد المباعة x هو توزيع ذي الحدين ودالته الاحتمالية من الشكل: (1 ن)

$$p(x = xi) = C_n^x p^x q^{n-x}$$

بحيث:

$$p=\frac{1}{100}=0.01 \quad و \quad q= 1-p= 1-0.01=0.99 \text{ و } n=200$$

إذا الدالة الاحتمالية لعدد الجرائد المباحة في الفترة من 8 إلى 9 صباحا تصبح من الشكل:

$$p(x = xi) = C_{200}^x 0.01^x 0.99^{200-x}$$

- التوقع : (1 ن)

$$E(x)= np=200*0.01=2$$

- التباين: (1 ن)

$$V(x)= npq=200*0.01*0.99=1.98$$

- نعم يمكن استخدام توزيع أخر وهو توزيع بواسون لتوفر شرطي تقريب توزيع ذي الحدين إلى توزيع بواسون وهما حجم العينة كبير جدا واحتمال النجاح صغير جدا أي: (1 ن)

$$n \to \infty \quad ; \quad p \to 0$$

$$200 \to \infty \quad ; \quad 0.01 \to 0$$

الدالة الاحتمالية لعدد الجرائد المباعة وفقا لتوزيع بواسون تعطى بالشكل التالي: (1 ن)

$$p(X = xi) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$p(X = xi) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

بحيث λ تمثل المتوسط وتحسب كما يلي:

λ =*E(x)= np=200*0.01=2*

إذا تصبح الدالة الاحتمالية لعدد الجرائد المباعة وفقا لتوزيع بواسون بالشكل التالي:

$$p(X = xi) = \frac{e^{-2}\ \ 2^x}{x!}$$

التمرين الرابع:

- حساب حدود المجال:

$x \sim U(a;b)$

- لدينا القيمة المتوقع لوقت الوصول: (2.5 ن)

$E(x)=\frac{a+b}{2} = 10$

$a + b = 10 * 2 = 20 \Rightarrow a=20-b.........(1)$

ولدينا تباين وقت الوصول:

$v(x) =\frac{(b-a)^2}{12}= 33.3 \Rightarrow (b-a)^2 = 12 * 33.3 = 399.6 = 400$

$b - a = \sqrt{400} = 20 \Rightarrow b - a = 20..........(2)$

نعوض (1) في (2) نجد :

$b - (20 - b) = 20 \Rightarrow b = 20$

نعوض قيمة b في (1) نجد :

$a=20-b= 20-20=0 \Rightarrow a = 0$

- حساب احتمال وصول الباخرة خلال 5 دقائق الأخيرة: (2.5 ن)

لدينا الدالة التراكمية للتوزيع المنتظم المستمر من الشكل التالي::

$F(X)=\frac{x-0}{20-0} = \frac{x}{20}$ $\qquad 0< x<20$

$P(15 < x\leqslant 20)= P(x\leqslant 20) - P(x\leqslant 20)=F(20)-F(15) =\frac{20}{20} - \frac{15}{20}$

$= 1-0.25 =0.75$

الاستاذة بوصوردي صليحة

بالتوفيق