كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير جامعة باتنة01 السنة الأولى ماستر–إدارة الموارد البشرية (2025/01/21)

الاجابة النموذجية لامتحان الدروة العادية في مقياس النمذجة الاحصائية: (2024–2025)

حل التمرين الأول

1- تقدير معلمات نموذج الانحدار الخطي البسيط النموذج المراد تقديره من الشكل: $Y_t = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 X_t + \varepsilon_t$

يمكن تقدير المعلمتين $\hat{b}_0$ و $\hat{b}_1$ باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية OLS بالاستعانة بالمجاميع المعطاة في التمرين:

1

$$\bar{X} = \frac{\sum X_t}{n} = \frac{738}{12} = 61.5 \quad , \quad \bar{Y} = \frac{\sum Y_t}{n} = \frac{273.6}{12} = 22.8$$

0.75

$$\hat{b}_1 = \frac{\sum X_t Y_t - n\bar{X}_t\bar{Y}_t}{\sum X_t^2 - n(\bar{X}_t)^2} = \frac{17078.4-(12*61.5*22.8)}{45654-12*61.5^2} = 0.943820$$

0.75

0.75

$$\hat{b}_0 = \bar{Y}_t - \hat{b}_1\bar{X}_t = 22.8 - (0.943820 * 61.5) = -35.244943$$

0.75

وعليه يكون النموذج المقدر كما يلي: $\hat{Y}_t = -35.244943 + 0.943820X_t$

2- حساب الانحراف المعياري للمعلمات $\sigma_{\hat{b}_1}$ ، $\sigma_{\hat{b}_0}$

0.5

$$\sigma^2_{\hat{b}_0} = \sigma^2_{\varepsilon}\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum(X-\bar{X})^2}\right) = \frac{\sum e_t^2}{n-2}\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum(X-\bar{X})^2}\right) = \frac{175.837303}{12-2}\left(\frac{1}{12} + \frac{61.5^2}{267}\right) = 250.551692$$

0.25

$$\sigma^2_{\hat{b}_0} = 250.551693 \Rightarrow \sigma_{\hat{b}_0} = \sqrt{250.551692} = 15.828824$$

0.25

0.5

$$\sigma^2_{\hat{b}_1} = \hat{\sigma}^2_{\varepsilon}\frac{1}{\sum(X-\bar{X})^2} = \frac{\sum e_t^2}{n-2} * \frac{1}{\sum(X-\bar{X})^2} = \frac{175.837303}{12-2} * \frac{1}{267} = 0{,}065856$$

0.25

$$\sigma^2_{\hat{b}_1} = 0{,}065856 \Rightarrow \sigma_{\hat{b}_1} = \sqrt{0{,}065856} = 0.256624$$

0.25

3- القيام باختبار المعنوية الإحصائية الفردية للمعلمات

0.25

	الفرضيات	$t_{cal\ bi} = \frac{\hat{b}_i - 0}{\sigma_{\hat{b}_i}}$	$t_{tab(10,\ \frac{5}{2}\%)}$	القرار
بالنسبة لـ b_0	$H_0: b_0 = 0$ $H_1: b_0 \neq 0$ 0.5	$t_{cal\ b0} = \frac{\hat{b}_0}{\sigma_{\hat{b}_0}}$ 0.25 $= \frac{-35.244943}{15.828824} = -2.226$	2.228 0.25	بما أن $\lvert t_{cal}\rvert < t^{\frac{5}{2}\%}_{tab}$ فإننا نقرر عدم رفض H_0 والمعلمة $(b_0 = 0)$ بشكل معنوي (ليس لها دلالة إحصائية) 0.25
بالنسبة لـ b_1	$H_0: b_1 = 0$ $H_1: b_1 \neq 0$ 0.5	$t_{cal\ b1} = \frac{\hat{b}_1}{\sigma_{\hat{b}_1}} = \frac{0.943820}{0.256624} = 3.677$ 0.25	2.228	بما أن $\lvert t_{cal}\rvert > t^{\frac{5}{2}\%}_{tab}$ فإننا نقرر رفض H_0 وقبول H_1 والمعلمة $(b_1 \neq 0)$ بشكل معنوي (لها دلالة إحصائية)) 0.25

4- اختبار إمكانية وجود مشكلة الارتباط الذاتي في الأخطاء من الرتبة الأولى باستخدام اختبار داربن و اتسن *DW*:

نموذج الارتباط الذاتي في الأخطاء من الرتبة الاولى من الشكل: $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + v_t$

أ- صياغة فرضيات الاختبار:

0.25

$$H_0: \rho = 0$$

$$H_1: \rho \neq 0$$

0.25

للكشف عن وجود الارتباط الذاتي في الأخطاء من الرتبة الأولى نستعمل اختبار داربن واتسون، لكنه يشترط مجموعة من الشروط وهي:

أ- يستخدم هذا الاختبار لاكتشاف الارتباط الذاتي في الأخطاء من الرتبة الأولى فقط. وهو ما نشده في هذا السؤال (هذا الشرط محقق)

ب- يجب أن يحتوي النموذج المقدر على معلمة تقاطعية (الحد الثابت=-35.244943) ، وهذا الشرط محقق ايضا في النموذج

ج- يجب ألا يحتوي الانحدار على المتغير التابع بفجوة زمنية معينة كمتغير تفسيري. وفي حالتنا هذا الشرط محقق.

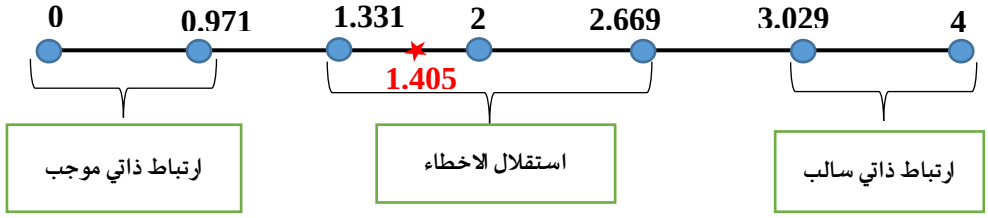
نلاحظ أن الشروط محققة لذلك يمكن استعمال اختبار داربن و اتسون *DW* ونحدد كل من DW_{cal} و DW_{tab} حيث:

0.5

$$DW_{cal} = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} = \frac{247.172224}{175.837303} = 1.405$$

0.25

كما أن قيمة داربن واتسون الجدولية $DW^{5\%}_{tab\ (n=12,\ k=1)} = \begin{cases} d_L = 0.971 \\ d_U = 1.331 \end{cases}$



0.25

ب-القرار : نلاحظ أن $DW_{cal} = 1.405$ تنتمي إلى مجال استقلال الأخطاء وبالتالي نقرر عدم رفض H_0 والنموذج لا يعاني من مشكلة الارتباط الذاتي في الاخطاء من الرتبة الأولى.

0. 5

5- اختبار امكانية وجود مشكلة تعدد الارتباطات الخطية باستعمال اختبار كلاين Klein:

في نماذج الانحدار الخطي البسيط لا تطرح مشكلة تعدد الارتباطات الخطية بين المتغيرات التفسيرية لوجود متغيري تفسيري وحيد

حل التمرين الثاني :

1- تقدير معالم النموذج: علما ان $(X^tY) = \begin{bmatrix} 80,46 \\ 120,819 \\ 284,815 \end{bmatrix}$ و $(X^tX)^{-1} = \begin{bmatrix} 2,833344 & -0,533921 & -0,563793 \\ -0,533921 & 0,254145 & 0,044556 \\ -0,563793 & 0,044556 & 0,141303 \end{bmatrix}$

0.75

$$\hat{b} = (X^tX)^{-1}(X^tY) \Rightarrow \hat{b} = \begin{bmatrix} 2,833344 & -0,533921 & -0,563793 \\ -0,533921 & 0,254145 & 0,044556 \\ -0,563793 & 0,044556 & 0,141303 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 80,46 \\ 120,819 \\ 284,815 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.886353 \\ 0.436478 \\ 0.265640 \end{bmatrix}$$

1.50

$$\hat{Y}_t = 2.886353 + 0.436478X_{1t} + 0.26564X_{2t}$$

2- جدول تحليل التباين والمقدرة التفسيرية : (0.25 نقطة لكل قيمة في الجدول اي بمجموع 1.75 نقطة)

مصدر التغيرات	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط المربعات
X_i	$SSR = \sum(\hat{Y} - \bar{Y})^2 = 1.017548$	2	$\frac{SSR}{2} = 0.508774$
البواقي	$SSE = \sum(Y - \hat{Y})^2 = \sum e_t^2 = 0.256279$	$n - (k+1) = 18 - (2+1) = 15$	$\frac{SSE}{15} = 0.017085$
الإجمالي	$SST = \sum(Y - \bar{Y})^2 = 1.273827$	$n - 1 = 29$	

حساب المقدرة التفسيرية للنموذج (باستعمال معامل التحديد المعدل)

$$(\overline{R^2}) = (R^2 Ajusté) = 1 - (1 - R^2).\frac{n-1}{n-(k+1)} = 1 - \left(1 - \frac{SSR}{SST}\right).\frac{n-1}{n-(k+1)}$$

0.5

$$(\overline{R^2}) = 1 - \left(1 - \frac{1.017548}{1.273827}\right) * \frac{18-1}{18-(2+1)} = 0.7719 = 77.19\%$$

0.5

أي أن 77.19% من التغيرات في الظاهرة المدروسة Y تفسرها المتغيرات التفسيرية $X1, X2$ في حين أن النسبة المتبقية $(100 - 77.19 = 22.81\%)$ يمكن ردها إلى متغيرات أخرى لم تدرج في النموذج.

0.25

3- الاختبارات المعنوية الكلية للنموذج عند مستوى معنوية 5%

$$H_0: b_1 = b_2 = 0$$
$$H_1: \exists i \ / b_i \neq 0 \ ou' \ i = 1,2$$

0.5

لاجراء الاختبار نستعمل احصاءة فيشر F ونحدد كل من F_{cal} و F_{tab} حيث: $F_{cal} = \frac{\frac{SSR}{K}}{\frac{SSE}{n-(k+1)}} = \frac{0.508774}{0.017085} = 29.7785$

0.75

وإحصاءة فيشر الجدولية: $F_{tab(K,n-(K+1))}^{0.05} = F_{tab(v1=2,\ v2=15)}^{0.05} = 3.68$

القرار: نلاحظ أن $(F_{cal} = 29.7785) > (F_{tab}^{0.05} = 3.68)$ لذلك نقرر رفض H_0 وقبول H_1 وبالتالي النموذج ذو دلالة إحصائية ويوجد على الأقل متغير يفسر المتغير Y بشكل معنوي. 0.25

4- اختبار المعنوية الإحصائية الجزئية نستخدم إحصاءة t لستودنت student حيث: $t_{cal\ bi} = \frac{\hat{b}_i - 0}{\sigma_{\hat{b}_i}}$ لذا يجب حساب $\sigma_{\hat{b}_i}$ باستخدام القطر الرئيسي لمصفوفة التبيانات والتغايرات كما يلي : 0.25

$$var(\hat{b}) = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 (X^t X)^{-1} = \frac{\sum e^2}{n-(K+1)} (X^t X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}048407 & -0{,}009122 & -0{,}009632 \\ -0{,}009122 & 0{,}004342 & 0{,}000761 \\ -0{,}009632 & 0{,}000761 & 0{,}002414 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{\hat{b}_0}^2 = 0{,}048407 \Rightarrow \sigma_{\hat{b}_0} = \sqrt{0{,}048407} = 0.220015$$
$$\sigma_{\hat{b}_1}^2 = 0{,}004342 \Rightarrow \sigma_{\hat{b}_1} = \sqrt{0{,}004342} = 0.065893$$
$$\sigma_{\hat{b}_2}^2 = 0{,}002414 \Rightarrow \sigma_{\hat{b}_2} = \sqrt{0{,}002414} = 0.049132$$

0.75

(2.نقطة للجدول أدناه)

	الفرضيات	$t_{cal\ bi} = \frac{\hat{b}_i - 0}{\sigma_{\hat{b}_i}}$	$t_{tab(15,\ \frac{5}{2}\%)}$	القرار
بالنسبة b_0 لـ	$H_0: b_0 = 0$ $H_1: b_0 \neq 0$	$t_{cal\ b0} = \frac{\hat{b}_0}{\sigma_{\hat{b}_0}} = \frac{2.886353}{0.220015} = 13.118$	2.131	بما أن $\lvert t_{cal} \rvert > t_{tab}^{\frac{5}{2}\%}$ فإننا نقرر رفض H_0 وقبول H_1 والمعلمة $(b_0 \neq 0)$ بشكل معنوي (لها دلالة إحصائية)
بالنسبة b_1 لـ	$H_0: b_1 = 0$ $H_1: b_1 \neq 0$	$t_{cal\ b1} = \frac{\hat{b}_1}{\sigma_{\hat{b}_1}} = \frac{0.436478}{0.065893} = 6.623$	2.131	بما أن $\lvert t_{cal} \rvert > t_{tab}^{\frac{5}{2}\%}$ فإننا نقرر رفض H_0 وقبول H_1 والمعلمة $(b_1 \neq 0)$ بشكل معنوي (لها دلالة إحصائية))
بالنسبة b_2 لـ	$H_0: b_2 = 0$ $H_1: b_2 \neq 0$	$t_{cal\ b2} = \frac{\hat{b}_2}{\sigma_{\hat{b}_2}} = \frac{0.26564}{0.049132} = 5.406$	2.131	بما أن $\lvert t_{cal} \rvert > t_{tab}^{\frac{5}{2}\%}$ فإننا نقرر رفض H_0 وقبول H_1 والمعلمة $(b_2 \neq 0)$ بشكل معنوي (لها دلالة إحصائية)

5-اختبار مشكلة تعدد الارتباطات الخطية باستخدام اختبار فرار جلوبر FARRAR GLAUBER 1.5 نقطة

الخطوة1: حساب (r) مصفوفة معاملات الارتباط البسيط ما بين المتغيرات المستقلة X_2 و X_1 حيث:

$$r = \begin{bmatrix} 1 & r_{X_1X_2} \\ r_{X_2X_1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}2351 \\ -0{,}2351 & 1 \end{bmatrix}$$

0.25

الخطوة2: حساب محدد مصفوفة معاملات الارتباط البسيط ما بين المتغيرات المستقلة.

$$Det(r) = |r| = \begin{vmatrix} 1 & -0{,}2351 \\ -0{,}2351 & 1 \end{vmatrix} = 0{,}944727$$

0.25

الخطوة3: إجراء ختبار فرار جلوبر F-G الذي يتبع توزيع كاي تربيع x^2، وعليه سنختبر الفرضيتين التاليتين:

H_0: $Det(r) = 1$ $(les\ series\ sont\ orthogonales)$ المتغيرات مستقلة

H_1: $Det(r) < 1$ $(les\ series\ sont\ dependantes)$ المتغيرات غير مستقلة

0.25

إن القيمة التجريبية أو المحسوبة لـ فرار جلوبر تتبع توزيع كاي تربيع x^2 حيث $n = 18$ و $k = 2$

$$\chi_{cal}^2 = -\left[n - 1 - \frac{1}{6}[2(k+1)+5]\right] ln(Det(r)) = -\left[18 - 1 - \frac{1}{6}[2(2+1)+5]\right] ln(0{,}944727) = 0.8625$$

$$\chi_{tab\left(df=\frac{1}{2}k(k+1),\alpha\%\right)}^2 = \chi_{tab\left(df=\frac{1}{2}2(2+1),5\%\right)}^2 = \chi_{tab(df=3\ ;\ 5\%)}^2 = 7.815$$

0.25

بما أن: $\chi_{cal}^2 < \chi_{tab(df=3\ ;\ 5\%)}^2$ فإننا نقرر عدم رفض H_0 وعليه تكون السلاسل مستقلة ولا توجد بذلك مشكلة تعدد الارتباطات الخطية. 0.25