الإسم واللقب: .... يوم:21 جانفي 2025 🕓 المدة: ساعة ونصف

الفوج: .... السنة الأولى ماستر تخصص: محاسبة وتدقيق

◄الحل النموذجي للامتحان العادي في مقياس النمذجة الاحصائية

تمرين: يوضح النموذج التالي العلاقة بين الانفاق (Y_i) والدخل X_i : $Y_i = a_0 + a_1 X_i + \varepsilon_i$

◄قم بملء الفراغات من (1) إلى (13) في الجدول أدناه، بالاستناد إلى المعطيات المتوفرة، مع توضيح طريقة الحل في الجدول الملحق:

n	10
R^2	0,7447 ....(3)
درجة الحرية	8 .... (4)
$V(X)$	7,2436.......... (5)
$\sum_{i=1}^{10}(Y_i - \hat{Y})^2$	**0,0928**
δ_ε^2	0,0116.... (6)
r	**0,863**
F_{cal} $\alpha = 5\%$	23,3.......... (11)

المعلمة	مقدر المعلمة	$V(\hat{a}_i)$	t_{cal} $\alpha = 5\%$
$\hat{a}_0$	0,31646 .... (2)	0,01585........ (7)	2,513........ (9)
$\hat{a}_1$	1,063 .... (1)	0 ,00016.......(8)	84 .... (10)
$a_0 \in [0,0261 \quad ; 0,6067]$.......(12)			
$a_1 \in [1,0068 \quad ; \quad 1,0651]$.......(13)			
$\sum_{i=1}^{10} Y_i X_i = 105$	$\sum_{i=1}^{10} Y_i = 105$	$\sum_{i=1}^{10} X_i = 95,8$	$\sum_{i=1}^{10} X_i^2 = 990,2$

(1)

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum_{i=1}^{i=n} X_i^2 - n\bar{X}^2} = \frac{1082,9 - 10(\frac{95,8}{10})(\frac{105}{10})}{990,2 - 10(\frac{95,8}{10})^2} = 1,063$$

(2)

$$\hat{a}_0 = \bar{Y} - \hat{a}_1 \bar{X} = (\frac{105}{10}) - (1,063)(\frac{95,8}{10}) = 0,31646$$

(3)

$$R^2 = r^2 = (0.863)^2 = 0,7447$$

(4) **درجة الحرية:**

$$n - 2 = 10 - 2 = 8$$

(5)

$$V(X) = \frac{\sum X_i^2}{n} - \bar{X}^2 = \frac{990,2}{10} - \left(\frac{95,8}{10}\right)^2 = 7,2436$$

(6)

$$\delta_\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^{10}(Y_i - \hat{Y})^2 \Big/ n-2 = 0,0116 \big/ 8 = 0,0116$$

(7)

$$V(\hat{a}_0) = \hat{\delta}_\varepsilon{}^2 \left[\frac{1}{n} + \left(\bar{X}^2 \Big/ \sum(X_t - \bar{X})^2\right)\right] = \hat{\delta}_\varepsilon{}^2 \left[\frac{1}{n} + \left(\bar{X}^2 \Big/ n * V(X)\right)\right]$$

$$V(\hat{a}_0) = 0,0116 \left[\frac{1}{10} + \left((95.8/10)^2 \Big/ 10 * (7,2436)\right)\right]$$

$$V(\hat{a}_0) = 0,01585$$

(8)

$$V(\hat{a}_1) = \hat{\delta}_\varepsilon{}^2 \Big/ \sum(X_t - \bar{X})^2 = \hat{\delta}_\varepsilon^2 \Big/ n * V(X) = 0,0116 \Big/ 10 * (7.2436)$$

$$V(\hat{a}_1) = 0,00016$$

$$t_{\hat{a}_0} = \frac{\hat{a}_0}{\sqrt{v(\hat{a}_0)}} = \frac{0,31646}{\sqrt{0,01585}} = 2,513 \quad (9)$$

$$t_{\hat{a}_1} = \frac{\hat{a}_1}{\sqrt{v(\hat{a}_1)}} = \frac{1,063}{\sqrt{0,00016}} = 84 \quad (10)$$

(11)

$$F_{cal} = R^2 / \frac{(1-R^2)}{(n-2)} = 0,7447 / \frac{(1-0,7447)}{(8)} = 23,3$$

(12) **مجال الثقة للمعامل a_0:** عند مستوى المعنوية $\alpha = 5\%$ ، **اذا علمت ان** $t_{tab} = 2,306$

$$a_0 = \hat{a}_0 \mp t_{n-2}^{\alpha/2} \sqrt{V(\hat{a}_0)} = 0,31646 \mp 2,306\sqrt{0,01585}$$

$$\boldsymbol{a_0} \in [\mathbf{0,0261} \quad ; \mathbf{0,6067}]$$

(13) **مجال الثقة للمعامل a_1:** عند مستوى المعنوية $\alpha = 5\%$ ، **اذا علمت ان** $t_{tab} = 2,306$

$$a_1 = \hat{a}_1 \mp t_{n-2}^{\alpha/2} \sqrt{V(\hat{a}_1)} = 1,063 \mp 2,306\sqrt{0,00016}$$

$$\boldsymbol{a_1} \in [\mathbf{1,0068} \quad ; \quad \mathbf{1,0651}]$$

دراسة المعنوية الكلية للنموذج عند مستوى المعنوية $\alpha = 5\%$ ، **اذا علمت ان** $F_{tab} = 5,32$

بما أن قيمة t المحسوبة (F_{cal}) أكبر من قيمة t الحرجة(F_{tab}) ، فإننا نرفض الفرضية الصفرية ونخلص إلى أن النموذج المقدر ذو دلالة إحصائية كلية عند مستوى الدلالة 0,05

دراسة معنوية معلمات النموذج عند مستوى المعنوية $\alpha = 5\%$ ، **اذا علمت ان** $t_{tab} = 2,306$

المعلمة $\hat{a}_0$:

بما أن قيمة t المحسوبة (t_{cal}) أكبر من قيمة t الحرجة (t_{tab}) ، فإننا نرفض الفرضية الصفرية H_0 ونخلص إلى أن المعلمة $\hat{a}_0$ ذات دلالة إحصائية عند مستوى الدلالة المختار 0,05

المعلمة $\hat{a}_1$:

بما أن قيمة t المحسوبة (t_{cal}) أكبر من قيمة t الحرجة(t_{tab}) ، فإننا نرفض الفرضية الصفرية ونخلص إلى أن المعلمة $\hat{a}_1$ ذات دلالة إحصائية عند مستوى الدلالة المختار 0,05

توقع لما سيكون عليه الإنفاق إذا كان الدخل 15 :

$$\hat{Y}_{PR} = 0,31646 - 1,063X_t = 0,31646 - 1,063(15) = 16,261$$

ما هو مجال الثقة لهذه القيمة المتوقعة عند مستوى دلالة 5%؟

$$\boxed{Y_{PR} = \hat{Y}_{PR} \pm t_{n-2}^{\alpha/2}.SE_{\hat{Y}_{PR}}}$$

$$SE_{\hat{Y}_{PR}} = \sqrt{\hat{\sigma}_\varepsilon^2.\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{\left(X_{PR} - \bar{X}\right)^2}{\sum_t \left(X_t - \bar{X}\right)^2}\right]} = \sqrt{0.0116\left[1 + \frac{1}{10} + \frac{\left(15 - \frac{95,8}{10}\right)^2}{72,436}\right]}$$

$$SE_{\hat{Y}_{PR}} = 0,01746438$$

$$Y_{PR} = \hat{Y}_{PR} \pm t_{n-2}^{\alpha/2}.SE_{\hat{Y}_{PR}} = 16,261 \pm 2.306(0,01746438)$$

$$\boldsymbol{Y_{PR}} \in [\mathbf{16,22} \quad ; \quad \mathbf{16,30}]$$