جامعة باتنـــــــــــــة 1

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
قسم: التعليم الأساسي

باتنة في: 2025/05/11
المدة: ساعة ونصف

امتحان السداسي الثاني في مقياس الإحصاء 2

الأسئلة النظرية: (05 نقاط)

1- برهن أن: $P(A) = 1 - P(\bar{A})$
2- برهن أن: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
3- ما الفرق بين الحوادث المتنافية والحوادث المستقلة؟
4- ما الفرق بين الحادث الأكيد والحادث المستحيل؟

التمرين الأول: (05 نقاط)

إذا كان A وB حادثين مستقلين، حيث: $P(A) = 0.15$, $P(B) = 0.4$

المطلوب:

1 أحسب الاحتمالات الآتية: $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P(\bar{A} \cap \bar{B})$, $P(\bar{A} \cup \bar{B})$, $P(A \cap \bar{B})$, $P(\bar{A})$, $P(\bar{B})$, $P(A/B)$, $P(B/A)$, $P(\overline{A/B})$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

في مصنع لإنتاج الملابس، تنتج الآلة M_1: **35%** من الإنتاج الكلي للمصنع، بينما تنتج الآلة M_2: **20%** من الإنتاج الكلي للمصنع، في حين تنتج الآلة M_3: **45%** من الإنتاج الكلي للمصنع. إذا علمت أن نسبة الإنتاج التالف للآلات الثلاثة هي: **1%**، **03%**، **02%** على التوالي، فإذا اختيرت أحد الوحدات المنتجة بطريقة عشوائية.

المطلوب:

1- ما احتمال أن تكون المختارة عشوائيا تالفة؟
2- إذا كانت الوحدة المختارة عشوائيا تالفة، فما هو احتمال أن تكون من انتاج الآلة M_2؟

التمرين الثالث: (05 نقاط)

إذ كان لديك قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X المتقطع، كما هو موضح في الجدول الآتي:

X	1	2	3	4	∑
P(X)	0.25	0.25	K	0.25	1

المطلوب:

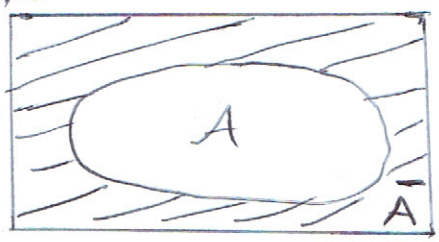
1- أوجد الثابت K.
2- أوجد دالة التوزيع التراكمي.
3- أحسب قيمة كل من: التوقع الرياضي والانحراف المعياري.

أساتذة المقياس
بالتوفيق

الإجابة النموذجية لامتحان السداسي الثاني
في مقياس: الإحصاء

الإجابة عن المسألة النظرية:

1- البرهان على أن: $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ (0.25)



- باستخدام شكل Venn المقابل لدينا: $A \cup \bar{A} = S$ ...(1) (0.25)
- بإدخال الاحتمال على الطرفين يكون لدينا:

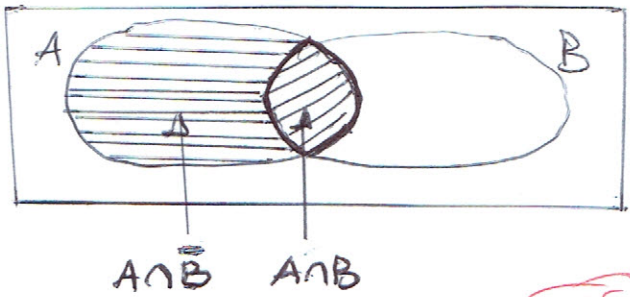
$(1) \Leftrightarrow P(A \cup \bar{A}) = P(S)$ ...(2) / $P(S) = 1$ (0.25)

- بما أن: A و $\bar{A}$ حادثين متنافيين (0.25)
- وحسب الفرضية الثانية لـ: كولموغروف، فاريا:

$(2) \Leftrightarrow P(A) + P(\bar{A}) = 1 \Rightarrow \boxed{P(A) = 1 - P(\bar{A})}$ (0.25)

- وهو المطلوب.

2- البرهان على أن: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (0.25)



- باستخدام شكل Venn المقابل لدينا:

$\begin{cases} A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) \\ A \cup B = B \cup (A \cap \bar{B}) \end{cases}$ (0.25)

- بإدخال كل احتمال على الطرفين نجد لدينا: (0.25)

$\begin{cases} P(A) = P[(A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)] \\ P(A \cup B) = P[B \cup (A \cap \bar{B})] \end{cases}$ (0.25)

- بما أن: $(A \cap B)$ و $(A \cap \bar{B})$ حوادث متنافية مثنى مثنى. (0.25)
- و $(A \cap \bar{B})$ و B حوادث متنافية مثنى مثنى.
- وحسب المسلمة الثانية لـ: كولموغروف، فاريا:

$\begin{cases} P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B) \ldots (1) \\ P(A \cup B) = P(B) + P(A \cap \bar{B}) \ldots (2) \end{cases}$ (0.25)

- بطرح المعادلة (1) من المعادلة (2) نجد:

$P(A \cup B) - P(A) = P(B) + P(A \cap \bar{B}) - P(A \cap \bar{B}) - P(A \cap B)$ (0.25)

$\Rightarrow \boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

- وهو المطلوب.

3 - الفرق بين الحوادث المتنافية والحوادث المستقلة، هو أن:

أ- الحوادث المتنافية: هي الحوادث التي لا يمكن وقوعها في آن واحد، حيث وقوع إحداهما ينفي وقوع الآخر. (0.5)

أي أن $A \cap B = \phi$

ب- الحوادث المستقلة: تكون الحوادث مستقلة إذا كان وقوع أحدها لا يؤثر ولا يتأثر بوقوع الآخر. (0.5)

4 - الفرق بين الحادث الأكيد والحادث المستحيل، هو أن:

أ- الحادث الأكيد: نقول عن حادث A أنه أكيد إذا كان تحقيقه مؤكدا نتيجة التجربة العشوائية، حيث: $P(A) = P(S) = 1$ (0.5)

ب- الحادث المستحيل: نقول عن حادث A أنه مستحيل إذا كان غير قابل للتحقق، مهما أعدنا التجربة العشوائية، حيث: $P(A) = P(\phi) = 0$ (0.5)

حل التمرين الأول:

$P(A) = 0,15$ ، $P(B) = 0,4$

A و B حادثين مستقلين بالتالي نكون لدينا:

- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.15 \times 0.4 = 0,06$ (0.5)
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,15 + 0.4 - 0,06 = 0.49$ (0.5)
- $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,49 = 0,51$ (0.5)
- $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,06 = 0,94$ (0.5)
- $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,15 - 0,06 = 0.09$ (0.5)
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,15 = 0,85$ (0.5)
- $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,40 = 0.60$ (0.5)
- $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,06}{0,4} = 0,15$ (0.5)
- $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,06}{0,15} = 0,4$ (0.5)
- $P(\overline{A/B}) = 1 - P(A/B) = 1 - 0,15 = 0.85$ (0.5)

حل التمرين الثاني:

المعطيات:

- $P(M_1) = 0.35$ (0.25) ، $P(M_2) = 0.20$ (0.25) ، $P(M_3) = 0,45$ (0.25)
- $P(B/M_1) = 0.01$ (0.25) ، $P(B/M_2) = 0,03$ (0.25) ، $P(B/M_3) = 0.02$ (0.25)

1- احتمال أن تكون الوحدة المختارة عشوائيا تالفة

(0.75) لتكن B: حدث الوحدة التالفة.

$$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(M_i) \cdot P(B/M_i) = P(M_1) \cdot P(B/M_1) + P(M_2) \cdot P(B/M_2) + P(M_3) \cdot P(B/M_3)$$

$$= 0.35 \times 0.01 + 0.20 \times 0.03 + 0.45 \times 0.02 \Rightarrow \boxed{P(B) = 0.0185}$$ (0.5)

(0.5) التعليق: 1.85% أن تكون الوحدة المختارة عشوائيا تالفة.

2- إذا كانت الوحدة المختارة عشوائيا تالفة، فما احتمال أن تكون من انتاج الآلة M_2 يا ترى؟

(0.75)

$$P(M_2/B) = \frac{P(M_2) \cdot P(B/M_2)}{P(B)} = \frac{0.20 \times 0.03}{0.0185} \Rightarrow \boxed{P(M_2/B) = 0.3243}$$ (0.5)

التعليق: 32.43% من احتمالات أن تكون الوحدة المختارة عشوائيا تالفة من انتاج الآلة M_2. (0.5)

حل التمرين الثالث:

x	1	2	3	4	المجموع
P(x)	0.25	0.25	0.25	0.25	1
F(x)	0	0.25	0.5	0.75	1
$x \cdot P(x)$	0.25	0.5	0.75	1	2.5
x^2	1	4	9	16	/
$x^2 P(x)$	0.25	1	2.25	4	7.5

(0.5) (0.5) (0.5) (0.5)

1- ايجاد الثابت k:

- $\sum P(x) = 1 \Rightarrow 0.25 + 0.25 + k + 0.25 = 1 \Rightarrow \boxed{k = 0.25}$ (0.25)

لدينا: (0.25) $F(x) = P(X \leq x)$

2- رسم التوزيع البرنولي:

3- أ- التوقع الرياضي: (0.5)

- $E(x) = \sum x P(x) \Rightarrow \boxed{E(x) = 2.5}$ (0.5)

ب- التباين: (0.25)

- $V(x) = E(x^2) - (E(x))^2$
$= \sum x^2 P(x) - (E(x))^2 = 7.5 - (2.5)^2 \Rightarrow \boxed{V(x) = 1.25}$ (0.25)

ج- الانحراف المعياري:

- $\sigma_x = \sqrt{V(x)} = \sqrt{1.25} \Rightarrow \boxed{\sigma_x = 1.11}$ (0.5) (0.25)