العام الدراسي: 2025/2024
السنة الأولى
مدة الامتحان: ساعة ونصف
التاريخ والتوقيت: 2025/05/13
12:00 ----10:30

جامعة العقيد الحاج لخضر – باتنة 1 -
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
قسم التعليم الأساسي

الإجابة النموذجية لامتحان السداسي الثاني في مادة الرياضيات II
الدورة العادية

التمرين الأول: (04 نقاط)

1/ $y' + x + 1 = -1 + x \iff y' = -1 + x - x - 1$ 0.5 $\iff y' = -2$

$y' = -2 \iff \frac{dy}{dx} = -2$ 0.5 $\implies \int \frac{dy}{dx} dx = \int -2\, dx \iff \int dy = \int -2\, dx$ 0.5

Than $y = -2x + c$ 1

2/ $y(-1) = 2 \iff -2(-1) + c = 2$ 0.5 $\iff 2 + c = 2 \iff c = 0$ 0.5

ومنه الحل الذي يحقق هذا الشرط هو: $y = -2x$ 0.5

التمرين الثاني: (08 نقاط)

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - xy + y^2 - 4$$

1/ $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3}{3}x^2 - y + 0 - 0 = x^2 - y$ 0.5 , $\frac{\partial f}{\partial y} = 0 - x + 2y - 0 = -x + 2y$ 0.5

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)'_x = (x^2 - y)'_x = 2x$ 0.25 , $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)'_y = (-x + 2y)'_y = 2$ 0.25

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)'_x = (-x + 2y)'_x = -1$ 0.25 , $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)'_y = (x^2 - y)'_y = -1$ 0.25

2/ $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$ 0.5 $\iff \begin{cases} y = x^2 \\ 2y - x = 0 \end{cases} \implies 2(x^2) - x = 0$

$\implies x(2x - 1) = 0$ 0.5 $\implies x = 0$ *or* $2x - 1 = 0$
$\implies x = 0$ 0.25 *or* $x = \frac{1}{2}$ 0.25

$x = 0 \implies y = (0)^2 = 0$ 0.25 , $x = \frac{1}{2} \implies y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ 0.25

ومنه النقاط الحدية للدالة f هي: $(0,0)$ و $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ 0.5

دراسة نوع النقاط الحدية

a/ For the point $(0,0)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=2(0)=0 \quad 0.25 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=2 \quad 0.25$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=-1 \quad 0.25 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=-1 \quad 0.25$$

$$\Delta(0,0)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)=(0)(2)-(-1)(-1)=-1<0 \quad 0.25$$

بما أن $\Delta<0$ فالنقطة $(0,0)$ هي نقطة سرجية. 0.5

b/ For the point $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)=1>0 \quad 0.25 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)=2>0 \quad 0.25$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)=-1 \quad 0.25 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)=-1 \quad 0.25$$

$$\Delta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)=(1)(2)-(-1)(-1)=1>0 \quad 0.25$$

فالنقطة $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ هي نقطة حدية صغرى. 0.5

التمرين الثالث: (08 نقاط)

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} \quad , \quad M=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix}-2\\ 5\\ -7\end{pmatrix}$$

$A.M$ معرّف لأن عدد أعمدة A :(3) يساوي عدد أسطر M :(3) 0.5

$A+B$ غير معرّف لأن ليس لهما نفس البعد: عدد أعمدة A :(3) لا يساوي عدد أعمدة B :(1) 0.5

$B.B$ غير معرّف لأن عدد أعمدة B :(1) لا يساوي عدد أسطر B :(3) 0.5

$M.B$ معرّف لأن عدد أعمدة M :(3) يساوي عدد أسطر B :(3) 0.5

$$M^t=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix} \quad 0.25 \quad , \quad B^t=\begin{pmatrix}-2 & 5 & -7\end{pmatrix} \quad 0.25$$

$$A.M=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-2)(1)+(1)(1)+(2)(1) & (-2)(1)+(1)(0)+(2)(1) & (-2)(3)+(1)(2)+(2)(2) \\ (0)(1)+(-1)(1)+(1)(1) & (0)(1)+(-1)(0)+(1)(1) & (0)(3)+(-1)(2)+(1)(2) \\ (1)(1)+(0)(1)+(-1)(1) & (1)(1)+(0)(0)+(-1)(1) & (1)(3)+(0)(2)+(-1)(2) \end{pmatrix}$$ 0.5

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$ 0.5

$$M.B = M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1)(-2)+(1)(5)+(3)(-7) \\ (1)(-2)+(0)(5)+(2)(-7) \\ (1)(-2)+(1)(5)+(2)(-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -16 \\ -11 \end{pmatrix}$$ 0.5

2/ نستنتج من نتيجة الجداء $A.M$ أن المصفوفة M هي مقلوب المصفوفة A لأن جداءهما أعطانا المصفوفة الحيادية I . أي أن: $M = A^{-1}$. 1

3/

$$\begin{cases} -2x + y + 2z = -2 \\ -y + z = 5 \\ x - z = -7 \end{cases}$$

نكتب أولا الشكل المصفوفي للجملة: $A.X = B$ حيث:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$$ 0.75

حل الجملة بطريقة قلب مصفوفة المعاملات يعتمد على حساب الجداء $A^{-1}.B$ لأن

$$A.X = B \iff X = A^{-1}.B$$ 0.5

وأثبتنا سابقا أن $M = A^{-1}$ وقمنا بحساب الجداء $M.B$ ، إذن:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}.B = M.B$$ 0.5

Than : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M.B = \begin{pmatrix} -18 \\ -16 \\ -11 \end{pmatrix}$ 0.5

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -16 \\ -11 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = -18 \\ y = -16 \\ z = -11 \end{cases}$$

فالحل الوحيد للجملة هو: $x = -18$ ، $y = -16$ ، $z = -11$. 0.75