جامعة العقيد الحاج لخضر – باتنة 1 -
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
قسم التعليم الأساسي

العام الدراسي: 2025/2024
السنة الأولى
مدة الامتحان: ساعة ونصف
التاريخ والتوقيت: 2025/01/21
10:00 ----08:30

الإجابة النموذجية لامتحان السداسي الأول في مادة الرياضيات I
الدورة العادية

التمرين الأول: (09 نقاط)

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} U_{n+1} = 5U_n - 1 \\ U_0 = 1 \end{cases}$

1) $U_2 = 5U_1 - 1$, where $U_1 = 5U_0 - 1 = 5(1) - 1 = \mathbf{4}$, than $U_2 = 5(4) - 1 = \mathbf{19}$

$U_3 = 5U_2 - 1 = 5(19) - 1 = \mathbf{94}$ 0.75

2) نضع الخاصية $P_{(n)}$ حيث: $P_{(n)}: \forall n \in \mathbb{N}, U_n > \frac{1}{4}$ 0.25

من أجل الحد الأول $n = 0$ ، لدينا : $U_0 = 1 > \frac{1}{4}$ ومنه $P_{(0)}$ صحيحة. 0.25

الآن نفرض أن $P_{(n)}$ صحيحة ونبرهن صحة $P_{(n+1)}$ حيث: $P_{(n+1)}: \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} > \frac{1}{4}$ 0.25

We have $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > \frac{1}{4} \Leftrightarrow 5U_n > \frac{5}{4} \Leftrightarrow 5U_n - 1 > \frac{5}{4} - 1 \Leftrightarrow 5U_n - 1 > \frac{1}{4}$ 0.5

Than $U_{n+1} > \frac{1}{4}$ 0.25

ومنه $P_{(n+1)}$ صحيحة فالخاصية $P_{(n)}$ صحيحة أي أن : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > \frac{1}{4}$

- إثبات أن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة تماما

$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - U_n = 5U_n - 1 - U_n = 4U_n - 1$ 0.5

وبما أن $U_n > \frac{1}{4}$ فإن $4U_n > 1$ أي أن $4U_n - 1 > 0$. 0.5 إذن: $U_{n+1} - U_n > 0$ 0.25

فالمتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة تماما.

3) $V_n = 4U_n - 1$

$(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \frac{V_{n+1}}{V_n} = q$ 0.25 ، حيث q ثابت حقيقي.

$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{4U_{n+1}-1}{4U_n-1} = \frac{4(5U_n-1)-1}{4U_n-1} = \frac{20U_n-5}{4U_n-1} = \frac{5(4U_n-1)}{4U_n-1} = 5$ 1

ومنه (V_n) متتالية هندسية أساسها $\boldsymbol{q = 5}$ وحدها الأول: $V_0 = 4U_0 - 1 = 4(1) - 1 = \mathbf{3}$ 0.25 0.25

عبارة الحد العام لـ $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بدلالة n هي $V_n = V_0 q^n = 3(5)^n$ 0.5

عبارة الحد العام لـ $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بدلالة n :

$$V_n = 4U_n - 1 \Leftrightarrow U_n = \frac{1}{4}V_n + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}(5)^n + \frac{1}{4}$$ 0.5

حساب المجموع:

$$S_n = U_2 + U_3 + \cdots + U_n = \left(\frac{1}{4}V_2 + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}V_3 + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4}V_n + \frac{1}{4}\right)$$ 0.5

$$= \frac{1}{4}\underbrace{(V_2 + V_3 + \cdots + V_n)}_{\text{مجموع م هـ أساسها 5 وحدها الأول } V_2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \cdots \frac{1}{4}\right)}_{(n-1)\text{مرّة}}$$ 0.5

نحسب V_2 : $V_2 = 4U_2 - 1 = 4(19) - 1 = 75$ 0.25

عدد الحدود هو: دليل آخر حد – دليل أول حد + 1 أي: $n - 2 + 1 = n - 1$ 0.5

$$S_n = \frac{1}{4}\left(V_2 \frac{q^{\text{عدد الحدود}} - 1}{q-1}\right) + \frac{1}{4}(n-1) = \frac{1}{4}\left(75\frac{(5)^{n-1}-1}{5-1}\right) + \frac{1}{4}(n-1)$$ 0.5

$$= \frac{75}{16}[(5)^{n-1} - 1] + \frac{1}{4}(n-1)$$ 0.5

التمرين الثاني:(06 نقاط)

$$f(x) = (x^2 - 5x + 7)e^x - 4$$

1) f دالة خطية معرّفة على $\mathbb{R}$ أي على المجال $]-\infty, +\infty[$. 1

2) $f'(x) = (2x-5)e^x + e^x(x^2 - 5x + 7)$ 0.5 $= (2x - 5 + x^2 - 5x + 7)e^x$ 0.5

$$= (x^2 - 3x + 2)e^x$$

3) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 3x + 2)e^x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$ 0.5

$$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(2) = 1 > 0$$

$$x_1 = \frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2(1)} = 1$$ 0.5 , $$x_2 = \frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2(1)} = 2$$ 0.5

ومنه f تقبل قيمتين حديتين عند $x_1 = 1$ و $x_2 = 2$.

نستخدم المشتقة الثانية لتحديد نوع القيم الحدية:

$f''(x) = \left((x^2 - 3x + 2)e^x\right)' = (2x - 3)e^x + e^x(x^2 - 3x + 2) = (x^2 - x - 1)e^x$ 0.5

$f''(1) = ((1)^2 - 1 - 1)e^1 = -e < 0$ 0.5

إذن توجد قيمة حدية عظمى عند $x_1 = 1$ 0.5

$f''(2) = ((2)^2 - 2 - 1)e^2 = e^2 > 0$ 0.5

إذن توجد قيمة حدية صغرى عند $x_2 = 2$ 0.5

التمرين الثالث:(05 نقاط)

$$I = \int \frac{Ln(x)}{x} dx$$

طريقة تغيير المتحول:

$x = e^t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{d(e^t)}{dt}$ 0.5 $\Rightarrow \frac{dx}{dt} = e^t \Rightarrow dx = e^t dt$ 0.5

$I = \int \frac{Ln(x)}{x} dx = \int \frac{Ln(e^t)}{e^t} e^t dt$ 0.5 $= \int t dt = \frac{1}{2}t^2 + c$ 0.5

$$x = e^t \Leftrightarrow Ln(x) = Ln(e^t) \Leftrightarrow t = Ln(x)$$ 0.5

$$I = \frac{1}{2}(Ln|x|)^2 + c$$ 0.5

حيث $c \in \mathbb{R}$ ثابت التكامل.

$I(1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(Ln|1|)^2 + c = \frac{1}{2}$ 0.5 $\Leftrightarrow \frac{1}{2}(0)^2 + c = \frac{1}{2} \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$ 0.5

إذن: $I = \frac{1}{2}(Ln|x|)^2 + \frac{1}{2}$ 1

طريقة التجزئة:

Put $\begin{cases} g(x) = Ln(x) \\ h'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$ 0.5 $\rightarrow$ $\begin{cases} g'(x) = \frac{1}{x} \\ h(x) = Ln(x) \end{cases}$ 0.5

$$I = g(x).h(x) - \int g'(x).h(x)dx$$ 0.5 $= (Ln|x|).(Ln|x|) - \underbrace{\int \frac{Ln(x)}{x} dx}_{I}$ 0.5

$I = (Ln|x|)^2 - I \Leftrightarrow 2I = (Ln|x|)^2$ 0.5 $\Leftrightarrow I = \frac{1}{2}(Ln|x|)^2 + c$ 0.5

حيث $c \in \mathbb{R}$ ثابت التكامل.