**الإجابة النموذجية لامتحان الإحصاء 3 (الدورة العادية) 2024-2025**

**السؤال الأول:**

هناك شرطين في التوزيعات المستمرة : 0.5 ن

**الشرط الأول** : وجود مجال تعريف $[a; b]$

الشرط الثاني : لابد أن تكون $f(x)$ دالة كثافة احتمالية، ولكي تكون $f(x)$ دالة كثافة احتمالية يجب أن تكون :

- $f(x)$ موجبة. 0.5 ن
- $f(x)$ مستمرة . 0.5 ن
- $\int_a^b f(x) = 1$ المساحة الكلية تحت المنحى تساوي الواحد الصحيح. 0.5 ن

**السؤال الثاني:**

بما أن التوقع الرياضي للتوزيع المنتظم يكون كالتالي: $E(X) = \frac{b+a}{2}$ :

وكما نعلم فإن التوقع الرياضي يساوي : $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{a} xf(x)dx + \int_{a}^{b} xf(x)dx + \int_{b}^{+\infty} xf(x)dx$$

من خلال تعريف التوزيع المنتظم المستمر: $\int_{-\infty}^{a} xf(x)dx = 0$ et $\int_{b}^{+\infty} xf(x)dx = 0$ or

$$\text{d'où } E(X) = \int_a^b x\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b$$

$$E(X) = \frac{1}{2(b-a)}[b^2 - a^2] = \frac{1}{2(b-a)}(b-a)(b+a) = \frac{b+a}{2}$$

حساب تباين التوزيع المنتظم المستمر:

وكما نعلم فإن تعريف التباين يكون كالتالي: $V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - E(X)^2$

وبنفس أسلوب تبسيط التباين $V(X) = \int_a^b x^2 \frac{dx}{b-a} - E(X)^2$

$$V(X) = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b - E(X)^2 = \frac{1}{b-a}\left[\frac{b^3-a^3}{3}\right] - \left[\frac{b+a}{2}\right]^2$$

$$\text{or } \frac{1}{b-a}\left[\frac{b^3-a^3}{3}\right] = \frac{1}{3}(b^2+ab+a^2) \text{ et } \left[\frac{(b+a)^2}{4}\right] = \frac{1}{4}(b^2+2ab+a^2)$$

$$\text{d'où } V(X) = \frac{1}{b-a}\left[\frac{b^3-a^3}{3}\right] - \left[\frac{(b+a)^2}{4}\right] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

ومنه فإن المعياري الانحراف : $\boldsymbol{\sigma = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}}$ 3 ن

**حل التمرين الأول:**

بما أنه لدينا: $\mu = 75, \sigma = 8$،

بما أن النسبة 10% الأوائل (صنف A) تكون على يمين المنحنى، وبالرجوع إلى جدول القيم Z وباستخراج القيمة المعيارية نجد:

$$p(z \geq z_a) = 0{,}1$$ 1ن

ونحن نعلم أن :

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

1- $p(z \geq z_a) = 0{,}1 \Rightarrow p(z \leq z_a) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$

$$p(z \leq z_a) = 0{,}9$$ 1ن

$$p\left(z \leq \frac{x_a - \mu}{\sigma}\right) = 0{,}9$$

$$\pi\left(\frac{x_a - \mu}{\sigma}\right) = \pi(1{,}28)$$

$$\pi\left(\frac{x_a - 75}{8}\right) = \pi(1{,}28)$$ 1ن

$$\frac{x_a - 75}{8} = 1{,}28 \Rightarrow x_a - 75 = 1{,}28(8)$$

$$x_a = 1{,}28(8) + 75$$

$$x_a = 85{,}24$$ 1ن

ومنه أدنى علامة يتحصل عليها الطالب في الدرجة الأولى هي 85,24.

2- $p\ (Z \leq a) = 0.0708$

$$P\ (\ Z \leq a) = 0.0708$$

$$P\ (\ Z \leq a) = 0.0708$$

$$\pi(-a) = 1 - \pi(a)$$

$$\pi(a) = 1 - \pi(-a)$$

$$\pi(a) = 1 - \pi(-a)$$

$$P(Z \leq a) = 0.0708$$

$$\pi(a) = 0.0708$$

$$1 - \pi(-a) = 0.0708$$

$$-\pi(-a) = 1 - 0.0708$$

$$-\pi(-a) = 0.9292$$

$$\pi(-a) = 9292$$

$$-\pi(-a) = -0.9292$$

$$\pi(-a) = 0.9292$$

ن1

$$\pi(-a) = \pi(1.47) \Rightarrow -a = 1{,}47 \Rightarrow \mathbf{a = -1{,}47}$$

**حل التمرين الثاني:**

ن1

لدينا n=500، ولدينا أيضا: $p = \frac{3{,}5}{1000} = 0{,}0035$، (احتمال وفاة طفل )

وبما أن : $p \leq 0{,}05, n > 100$ ، فإن التوزيع الاحتمالي المناسب هو التوزيع بواسون كتقريب لتوزيع ثنائي الحدين:

ن1

يصبح لدينا:

$$n = 500, \quad np = 500(0{,}0035) = 1{,}75$$ ن1

$$np = \lambda = 1{,}75$$

$$x \sim POI(1{,}75)$$

$$p(X = x) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{\lambda}, k = 0,1,2, \dots\dots\dots\dots\dots k$$

1. $p(X = 0) = \frac{1{,}75^0}{0!} e^{1{,}75} = \mathbf{0{,}174}$ ن1
2. $p(x \leq 3) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3)$

$$= e^{1,75}\left(\frac{1,75^0}{0!}+\frac{1,75^1}{1!}+\frac{1,75^2}{2!}+\frac{1,75^3}{3!}\right) = \mathbf{0,899}$$ ن2

**حل التمرين الثالث:**

يتم استخدام توزيع ثنائي الحدين ، احتمال استخدام حزام الأمان هو احتمال النجاح؛ $p = 0,6$

احتمال عدم استخدام حزام الأمان هو احتمال الفشل ؛ $q = 1 - 0,6 = 0,4$

حجم العينة هو n ؛ حيث أن $n = 10$

ن1 $x \sim BIN(n; p)$

$x \sim BIN(10; 0,6)$

دالة توزيع ثنائي الحدين تعطى بالعلاقة التالية:

$$P(x=k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad , \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

1. $p(x = 7) = C_{10}^7 (0,6)^7 (0,4)^3 = \mathbf{0,215}$ ن1

2. $p(x \leq 7) = p(x = 0) + p(x = 1) + p(x = 2) + p(x = 3) +$
$p(x = 4) + p(x = 5) + p(x = 6) + p(x = 7) = 0,000 + 0,002 +$
$0,011 + 0,042 + 0,111 + 0,201 + 0,251 + 0,215 = \mathbf{0,833}$ ن2