جامعة باتنة -1- الحاج لخضر

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير — باتنة في: 2018/05/20

قسم: التعليم الأساسي — المدة: ساعة و نصف

امتحان السداسي الثاني في مقياس الاحتمالات

التمرين الأول: (06 نقاط)

1- أثبت أن: $P(\emptyset) = 0$

2- إذا كان: $P(A) = \frac{2}{15}$, $P(B) = \frac{4}{15}$، وكان A و B حادثين متنافيين، أوجد: $P(A \cup B)$

3- إذا كان: $P(B) = 0.3$, $P(A \cup B) = 0.8$، وكان A و B حادثين مستقلين، أوجد: $P(A)$

4- ما هما الشرطين الأساسيين الواجب توافرهما، لكي تكون الدالة f دالة كثافة احتمالية؟

التمرين الأول: (04 نقاط)

تستأجر إحدى الشركات التجارية سياراتها من ثلاثة مصادر هي: A، B، C، بحيث تستأجر 20% من السيارات من النوع A، وتستأجر 20% من السيارات من النوع B، وتستأجر الباقي من النوع C. وقد تبين من خلال التبادل الطويل بين الشركة التجارية وشركات التأجير أن: 10% من سيارات النوع A و 12% من سيارات النوع B و 4% من سيارات النوع C، تشكو من سوء التبريد.

المطلوب:

1- إذا استخدم زبون إحدى هذه السيارات في يوم ما، ما احتمال أن يواجه مشكلة في التبريد؟

2- إذا علمت أنه يواجه فعلا مشكلة في التبريد، فما هو احتمال أن تكون السيارة قد استأجرت من الشركة C؟

التمرين الرابع: (05 نقاط)

لتكن الدالة الآتية:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0 . 1] \\ 0, & x \notin [0 . 1] \end{cases}$$

المطلوب:

1- أثبت أن: f دالة كثافة احتمالية.

2- أحسب كل من: القيمة المتوقعة والانحراف المعياري.

3- أحسب قيمة الاحتمال: $P(0 \leq x \leq \frac{1}{2})$.

التمرين الخامس: (05 نقاط)

لتكن التجربة العشوائية المتمثلة في رمي قطعة نقود ثلاث مرات متتالية، وليكن x متغير عشوائي الذي يتمثل في: "عدد مرات ظهور الصورة F "

المطلوب:

1- أوجد قانون الاحتمال للمتغير العشوائي x.

2- أوجد قيمة التوقع الرياضي، والانحراف المعياري.

الفرقة البيداغوجية للمقياس

بالتوفيق

الإجابة النموذجية للامتحان السداسي الثاني في مقياس: الإحصاء

حل التمرين الأول (6 نقاط)

1- $P(\phi)=0$ (1.5)

لدينا:

$$S = S\cup\phi \Rightarrow P(S) = P(S\cup\phi) = P(S)$$

حيث أن: S و ϕ حادثتين متنافيتين، وحسب المسلمة الثالثة لـ: كولموغوروف، فإن:

$$P(S) = P(S) + P(\phi) \Rightarrow P(\phi) = P(S) - P(S) = 0 \Rightarrow P(\phi)=0$$ وهو المطلوب

2- $P(A\cup B) = P(A)+P(B) - P(A\cap B) = P(A)+P(B)$ $\quad / P(A\cap B)=0$ لأن الحادثتين A و B متنافيتين (1.5)

$$= \frac{2}{15} + \frac{4}{15}$$

$$= \frac{6}{15}$$

بما أن الحادثتين A و B مستقلتين، فإن: لدينا:

3- $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$ (1.5)

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)$$

$$\Rightarrow P(A\cup B) = P(A)\left[1-P(B)\right]+P(B)$$

$$\Rightarrow P(A\cup B)-P(B) = P(A)\left[1-P(B)\right]$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{P(A\cup B)-P(B)}{1-P(B)} = \frac{0.8-0.3}{1-0.3} = \frac{0.5}{0.7} = 0.71$$

4- الشرطين الأساسيين الواجب توافرهما لكي تكون الدالة f دالة كثافة احتمالية: (1.5)

- $f(x)\geq 0$ ، أي أن الدالة f موجبة لجميع قيم x.
- $\int_{IR} f(x)\,dx = 1$

حل التمرين الثاني (4 نقاط)

1- نوضع الحادث E يمثل : "مشكلة التبريد" من العربة

فإن احتمال أن يواجه الزبون مشكلة في التبريد يساوي :

$$P(E) = P(A) \times P(E/A) + P(B) \times P(E/B) + P(C) \times P(E/C)$$ 2

$$= 0.2 \times 0.1 + 0.2 \times 0.12 + 0.6 \times 0.04 = 0{,}068$$

6.8% من مجموع الحالات أن يواجه هذا الزبون مشكلة في التبريد

مع العلم أن : $P(C) = 1 - [P(A) + P(B)] = 1 - [0.2 + 0.2] = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

2- إذا كان الزبون يواجه فعلاً مشكلة في التبريد ، فإن احتمال

أن تكون السيارة قد استأجرت من الشركة C

$$P(C/E) = \frac{P(C) \cdot P(E/C)}{P(E)} = \frac{0.6 \times 0.4}{0.068} = 0.3529$$ 2

35.29% من الحالات أن تكون السيارة التي تواجه مشكلة

في التبريد قد استأجرت من الشركة C

حل التمرين الثالث : (4 نقاط)

$$1- \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 2x\,dx = \cancel{\int_{-\infty}^{0} 2x\,dx} + \int_0^1 2x\,dx + \cancel{\int_1^{+\infty} 2x\,dx}$$

$$= \int_0^1 2x\,dx = 2\int_0^1 x\,dx = \cancel{2}\left[\frac{x^2}{\cancel{2}}\right]_0^1 = 1$$ 1

إضافة إلى ذلك، فإنه : $\forall x \in [0,1]$ ، فإن الدالة f موجبة

بالتالي، فإن الدالة f دالة كثافة احتمالية

$$2- E(x) = \int_0^1 x\,f(x)\,dx = \int_0^1 x\,(2x)\,dx = 2\int_0^1 x^2\,dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$ 1

$$3- V(x) = E(x^2) - (E(x))^2$$

$$\Rightarrow V(x) = \int_0^1 x^2 f(x)\,dx - \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\Rightarrow V(x) = \int_0^1 x^2 (2x)\,dx - \frac{4}{9}$$ 1

$$\Rightarrow V(x) = 2\int_0^1 x^3\,dx - \frac{4}{9}$$ 1

$$\Rightarrow V(x) = 2\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 - \frac{4}{9} = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18} \Rightarrow \sigma_x = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{1}{18}} = 0.23$$

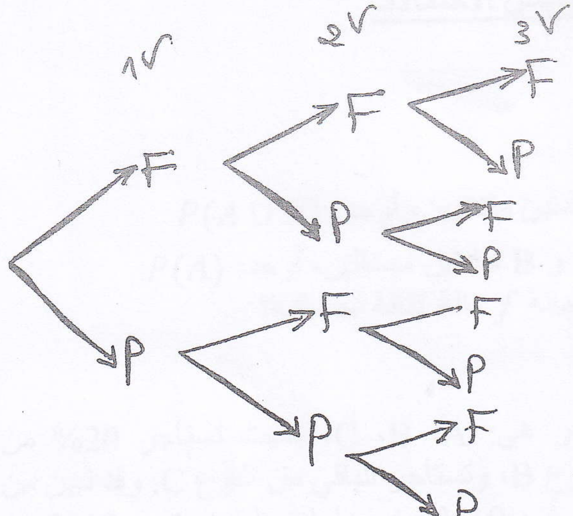
$3- P(0 \leq x \leq \frac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} x\,dx = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} = 0.25$ (1)

25% من الاحتمالات أن نأخذ عدد قيمة تكون محصورة بين الصفر و $\frac{1}{2}$

(4 نقاط)

التمرين الرابع: عند رمي قطعة نقود ثلاث مرات تكون مخطط شجرة الاحتمال كالآتي:

x_i	3V	2V	1V
3	F	F	F
2	F	F	P
2	F	P	F
1	F	P	P
2	P	F	F
1	P	F	P
1	P	P	F
0	P	P	P



(1)

ليكن x متغير احصائي الذي يمثل: "عدد مرات ظهور الصورة F"
بالتالي تكون لدينا الجدول كالآتي:

1)

x	0	1	2	3	Σ
$P(x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1
$x\,P(x_i)$	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{12}{8} = 1.5$
x_i^2	0	1	4	9	/
$x_i^2\,P(x_i)$	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{12}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{24}{8} = 3$

(2)

2) $E(X) = \sum x\,P(x_i) = 1.5$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$\Rightarrow V(X) = 3 - (1.5)^2 = 0.75$ (2)

$\Rightarrow \sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.75} = 0.86$