جامعة باتنـــــــــــة 1

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
قسم: التعليم الأساسي

باتنة في: 2024/05/12
المدة: ساعة ونصف

امتحان السداسي الثاني في مقياس الإحصاء 2

الأسئلة النظرية: (05 نقاط)

1- برهن أن: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
2- برهن أن: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
3- ليكن A وB حادثين، S المجموعة الشاملة التابعة لتجربة عشوائية ما. عبر عن الحوادث التالية بلغة الاحتمالات: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap B = \emptyset$, $S = A$, $B = \emptyset$, $A \Delta B$
4- ما هما الشرطين الأساسيين الواجب توافرهما، لكي تكون الدالة f دالة كثافة احتمالية؟

التمرين الأول: (05 نقاط)

إذا كانت لديك الاحتمالات الأتية، حيث: $P(A \cup B) = 0.65$, $P(B) = 0.3$, $P(A) = 0.5$

المطلوب:
1- هل الحادثين A وB متنافيين، مع التبرير؟
2- أحسب الاحتمالات الآتية: $P(\bar{A})$, $P(\bar{B})$, $P(A \cap \bar{B})$, $P(\bar{A} \cap \bar{B})$, $P(\overline{A}/_{B})$
3- هل الحادثين A وB مستقلين؟
4- إذا كان الحادث A مستقل عن B، فهل الحادث $\bar{A}$ مستقل عن $\bar{B}$؟

التمرين الثاني: (05 نقاط)

مصنع إنتاجي يقوم بإنتاج ثلاثة أنواع من المكيفات الهوائية هي على الترتيب: I، II، III، إذا علمت أن المصنع يقوم بإنتاج 40% من النوع I، وينتج 50% النوع II، والنسبة المتبقية يتم إنتاجها من النوع III (بفرض أن نسبة الإنتاج الكلي للمصنع من الأنواع الثلاثة هي 100%). وكانت نسب الإنتاج المعيب (التالف) للمصنع هي: 03%، 01%، 02% على الترتيب، فإذا اختيرت أحد المكيفات بطريقة عشوائية.

المطلوب:
1- ما هو احتمال أن يكون المكيف المختار بطريقة عشوائيا معيب؟
2- إذا كان المكيف المختار بطريقة عشوائية معيب، فما هو احتمال أن يكون من النوع II؟

التمرين الثالث: (05 نقاط)

إذ كان لديك قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X كما يلي:

X	0	1	2	3	$\sum$
$P(X=x_i)$	0.2	0.08 K	0.064 K	0.512	1

المطلوب:
1- أوجد الثابت K.
2- أوجد دالة التوزيع التراكمي.
3- أحسب كل من: التوقع الرياضي والانحراف المعياري.

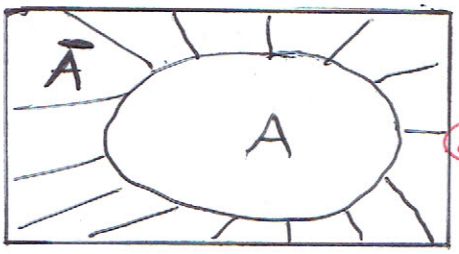
أساتذة المقياس
بالتوفيق

الإجابة النموذجية لامتحان السداسي الثاني في مقياس: الإحصاء 2
دورة ماي: 2024

الإجابة على المسألة النظرية:

1- البرهان على أن: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

انطلاقا من شكل Venn المقابل:



(0.25)

لدينا: $A \cup \bar{A} = S$ (0.25)

ناخذ احتمال الطرفين: $P(A \cup \bar{A}) = P(S)$ (0.25)

نعلم أن A و $\bar{A}$ حادثين متنافيين، وحسب المسلمة الثانية

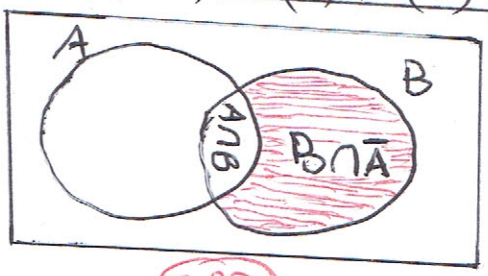
(0.25) $P(A) + P(\bar{A}) = P(S)$ / $P(S) = 1$ (0.25)

(0.25) $\Rightarrow P(A) + P(\bar{A}) = 1 \Rightarrow \boxed{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$

وهو المطلوب.

2- البرهان على أن: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

انطلاقا من شكل Venn المقابل:



(0.25)

نكون لدينا: $\begin{cases} A \cup B = A \cup (B \cap \bar{A}) \\ B = (A \cap B) \cup (B \cap \bar{A}) \end{cases}$ (0.25)

$\Rightarrow \begin{cases} P(A \cup B) = P[A \cup (B \cap \bar{A})] \\ P(B) = P[(A \cap B) \cup (B \cap \bar{A})] \end{cases}$ (0.25)

$\Rightarrow \begin{cases} P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap \bar{A}) \dots (1) \\ P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap \bar{A}) \dots (2) \end{cases}$ (0.25)

بطرح المعادلة (2) من المعادلة (1) نحصل على:

$P(A \cup B) - P(B) = P(A) + \cancel{P(B \cap \bar{A})} - P(A \cap B) - \cancel{P(B \cap \bar{A})}$

$\Rightarrow \boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$ (0.25) (0.25)

وهو المطلوب.

3- التعبير عن الحوادث التالية بلغة الاحتمالات:

* $A \cup B$: يتحقق A (1) أو B (2) أو كليهما. (0.25)
* $A \cap B$: يتحقق A و B معا في آن واحد. (0.25) A و B متنافيين (منفصلين). (0.25)
* $A \cap B = \phi$: X يمكن أن يتحقق A و B معا، فالحادثين A و B متنافيين (منفصلين). (0.25)
* $S = A$: حادث أكيد. (0.25)
* $B = \phi$: حادث مستحيل. (0.25)
* $A \Delta B$: حدوث A لوحده أو B لوحده وليس كليهما. (0.25)

4- الشرطين الأساسيين الواجب توافرهما لكي تكون الدالة f دالة كثافة احتمالية: الدالة f موجبة لجميع قيم x

$\begin{cases} * f(x) \geq 0 \quad (0.25) \\ * \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1 \quad (0.25) \end{cases}$

حل التمرين الأول:

$P(A)=0.5$, $P(B)=0,3$, $P(A\cup B)=0,65$

1- هل الحادثين A و B متنافيين أم لا مع التبرير

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$ (0,25)

$\Rightarrow P(A\cap B)=0.5+0,3-0,65$

$\Rightarrow P(A\cap B)=0.15\neq 0$ (0,25)

بالتالي نجد: الحادثين A و B غير متنافيين. (0,25)

2- حساب الاحتمالات التالية:

* $P(\bar{A})=1-P(A)=1-0,5=0.5$ (0,25)
* $P(\bar{B})=1-P(B)=1-0,3=0.7$ (0,25)
* $P(A\cap\bar{B})=P(A)-P(A\cap B)=0,5-0,15=0,35$ (0,25)
* $P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0,65=0,35$ (0,25)
* $P(\bar{A}/B)=1-P(A/B)=1-\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=1-\frac{0,15}{0,3}=1-0.5=0.5$ (0,25)

3- هل الحادثين A و B مستقلين أم لا؟

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B) \Leftrightarrow 0,15=0.5\times 0,3 \Rightarrow 0,15=0,15$ (0,25)

بالتالي الحادثين A و B مستقلين. (0,25)

4- إذا كان الحادث A مستقل عن B، هل الحادث $\bar{A}$ مستقل عن $\bar{B}$ ؟

$P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$

$\Rightarrow P(\bar{A}\cap\bar{B})=1-[P(A)+P(B)-P(A\cap B)]$

$\Rightarrow P(\bar{A}\cap\bar{B})=1-[P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)]$

$\Rightarrow P(\bar{A}\cap\bar{B})=(1-P(A))\cdot(1-P(B))$

$\Rightarrow P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})$ (0,25)

البرهان غير مطلوب من الطالب

$\Rightarrow 0,35=0,5\cdot 0,7 \Rightarrow 0,35=0,35$ (0,25) (0,25)

بالتالي: إذا كان A و B حادثين مستقلين، فإن $\bar{A}$ و $\bar{B}$ (متمم هما) أيضا مستقلين.

حل التمرين الثاني:

$P(M_1)=0.4$; $P(M_2)=0,5$; $P(M_3)=0,1$ (0,25) (0,25) (0,25)

باعتبار أن نسبة الإنتاج الكلي للمصنع من كل أنواع الآلات هي 100%

$P(B/M_1)=0,03$; $P(B/M_2)=0,01$; $P(B/M_3)=0,02$ (0,25) (0,25) (0,25)

1- حساب احتمال أن يكون المكتب اختبار بطريقة عشوائية معيب (غير صالح)

باعتبار B: المكتب اختبار عشوائيا معيب

$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(M_i)\cdot P(B/M_i)=P(M_1)\cdot P(B/M_1)+P(M_2)\cdot P(B/M_2)+P(M_3)\cdot P(B/M_3)$ (0,5) (0,5)

$=0,4\times 0,03+0,5\times 0,01+0,1\times 0,02=0,019$ (0,5) (0,5)

التعليق: 1,9% من الاحتمالات أن يكون المكتب اختبار عشوائيا معيب، فإن احتمال أن يكون من النوع II: (0,5)

2- إذا كان المكتب اختبار عشوائيا معيب، فإن احتمال أن يكون من النوع II:

$P(M_2/B)=\frac{P(M_2)\cdot P(B/M_2)}{P(B)}=\frac{0.5\times 0,01}{0,019}=0,2631$ (0,5)

التعليق: 26,31% من الاحتمالات أن يكون المكتب اختبار عشوائيا من النوع II. (0,5)

حل التمرين الثالث :

1- إيجاد الثابت k

لدينا : $0.2 + 0.08k + 0.064k + 0.512 = 1 \Rightarrow 0.144k + 0.712 = 1$ (0.5)

$\Rightarrow 0.144k = 0.288 \Rightarrow \boxed{k = 2}$ (0.5)

2- إيجاد دالة التوزيع التراكمي : $\boxed{F(x) = P(X \leq x_i)}$

x	0	1	2	3	المجموع
$P(X=x_i)$	0,2	0,16	0,128	0,512	1
$F(x)$	0	0.2	0.36	0,488	1
$xP(x)$	0	0,16	0.256	1.536	1,952
x^2	0	1	4	9	/
$x^2P(x)$	0	0,16	0,512	4.608	5,28
$(x-E(x))$	-1,952	-0,952	0.048	1,048	/
$(x-E(x))^2$	3,810304	0,906304	0,002304	1,098304	/
$P(x)(x-E(x))^2$	0,76206608	0,14500864	0,00029412	0,56233648	1,469696

(0.5) (0.5) (0.5) (0.5) (0.5) — I ب — II ب

3- أ- حساب التوقع الرياضي :

$E(x) = \sum xP(x) \Rightarrow \boxed{E(x) = 1.952}$ (0.5)

ب- حساب التباين :

- $V(x) = \sum P(x)(x - E(x))^2 \Rightarrow \boxed{V(x) = 1,469696}$
- $V(x) = E(x^2) - (E(x))^2$

ط1 : باستخدام العبارة الأولى للتباين :

ط2 : باستخدام العبارة الثانية للتباين : (0.5)

$\Rightarrow V(x) = \sum x^2 P(x) - (E(x))^2$

$\Rightarrow V(x) = 5.28 - (1.952)^2 \Rightarrow \boxed{V(x) = 1,469696}$ (0.5)

ملاحظة : يتم احتساب طريقة واحدة فقط

ج- حساب قيمة الانحراف المعياري :

$\sigma_x = \sqrt{V(x)} = \sqrt{1.469696} \Rightarrow \boxed{\sigma_x = 1,21}$ (0.5)